Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I.

1º Bachillerato

Capítulo 1: ÁLGEBRA

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS

Revisor: Eduardo Cuchillo

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. NÚMEROS REALES

1.1. NÚMEROS RACIONALES Y NÚMEROS IRRACIONALES
1.2. LA RECTA REAL
1.3. VALOR ABSOLUTO. DISTANCIA EN LA RECTA REAL
1.4. INTERVALOS Y ENTORNOS
1.5 APROXIMACIÓN DE UN NÚMERO DECIMAL. ESTIMACIÓN, REDONDEO Y ERRORES

2. POLINOMIOS

2.1. DEFINICIÓN, TÉRMINOS, GRADO, VALOR NUMÉRICO
2.2. OPERACIONES CON POLINOMIOS.
2.3. REGLA DE RUFFINI. TEOREMA DEL RESTO.
2.4. RAÍCES DE UN POLINOMIO.
2.5. FACTORIZACION DE POLINOMIOS.
2.6. FRACCIONES ALGEBRAICAS.

3. ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO.

3.1. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.
3.2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO
3.3. RESOLUCION DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO Y SU INTERPRETACIÓN GRAFICA.
3.4. RESOLUCION DE INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

4. SiSTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

4.1. RESOLUCION POR EL MÉTODO DE GAUSS.
4.2. DISCUSION DE SISTEMAS APLICANDO EL METODO DE GAUSS.
4.3. PROBLEMAS DE ECUACIONES LINEALES.
4.4. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SU INTERPRETACIÓN GRÁFICA.

5. PROBLEMAS DE MATEMÁTICA FINANCIERA.

5.1. TASAS.
5.2. NÚMEROS ÍNDICE
5.3. INTERÉS SIMPLE.
5.4. INTERÉS COMPUESTO.
5.5. ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN
5.6. TASA ANUAL EQUIVALENTE. (T.A.E.)
5.7. ANUALIDADES DE AMORTIZACIÓN.

En este primer capítulo de Bachillerato vamos a hacer un repaso de los Números Reales haciendo mención a los números naturales, enteros, así como de los irracionales.

Ya más concretamente en Algebra repasaremos todos los conceptos relacionados con polinomios, ecuaciones e inecuaciones, para adentrarnos en los sistemas de ecuaciones, su resolución y representaciones gráficas, basándonos en el método de resolución de sistemas de ecuaciones, "*Método de Gauss*" matemático muy importante en Algebra pues fue el primero en dar una demostración del teorema fundamental del Algebra: *"toda ecuación algebraica de grado n tiene n soluciones"*.

Seguiremos con las inecuaciones y sistemas de inecuaciones que nos servirán para comprender los parámetros financieros y las anualidades de amortización y capitalización que se aplican cuando invertimos un capital o adquirimos un préstamo a un determinado interés simple o compuesto y durante un determinado tiempo.

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. NÚMEROS REALES:

1.1. Números racionales y números irracionales.

Recuerda que:

Ya conoces los distintos tipos de conjuntos numéricos:

Naturales ➔ $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Enteros ➔ $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Los números racionales también contienen a los números que tienen expresión decimal exacta (0,12345) y a los que tienen expresión decimal periódica (7,01252525…). Si el denominador (de la fracción irreducible) sólo tiene como factores primos potencias de 2 o 5 la expresión decimal es exacta. Si el denominador (de la fracción irreducible) tiene algún factor primo que no sea ni 2 ni 5 la fracción tendrá una expresión decimal periódica.

Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica; y toda expresión decimal exacta o periódica se puede escribir en forma de fracción.

Racionales ➔ $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} ; a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$

Pero ya sabes que existen números que no son racionales. Por ejemplo: $\sqrt{2}$ **no** puede ponerse como fracción. Todos estos números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π … junto con los números racionales forman el conjunto de los **números reales**. Y a los números reales que no son números racionales se les llama **números irracionales**.

La expresión decimal de los **números irracionales** es de infinitas cifras no periódicas.

Por tanto

Irracionales ➔ $\mathbf{I} = \Re - \mathbf{Q}$.

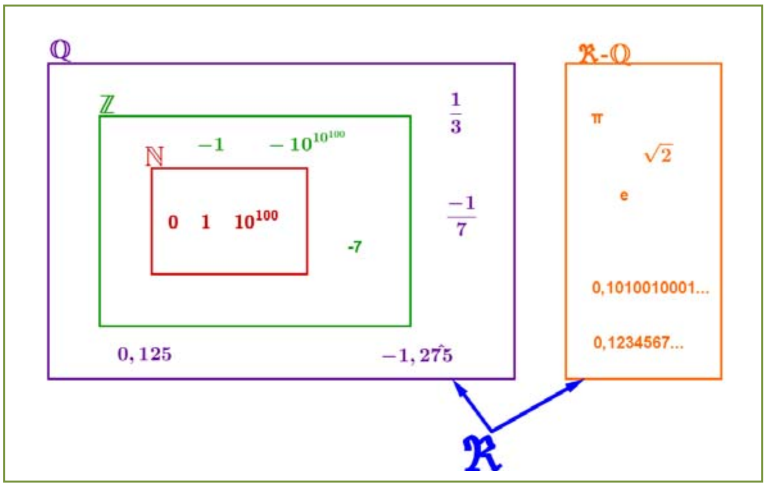
El conjunto de los **números reales** está formado por la unión de los números racionales y de los irracionales.

Reales ➔ $\Re = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Tenemos por tanto que: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \Re$.

$\mathbf{I} \subset \Re$

Número π: imágenes de Google



Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS

Revisor: Eduardo Cuchillo

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. La recta real.

Los números reales son **densos**, es decir, entre cada dos números reales hay infinitos números.

Eso es fácil de deducir, si a, b son dos números con $a < b$ sabemos que $a < \frac{a+b}{2} < b$, es decir, la media está entre los dos números. Como esto podemos hacerlo las veces que queramos, pues de ahí el resultado.

Curiosamente los racionales son también densos, así como los irracionales.

Representación en la recta real de los números reales:

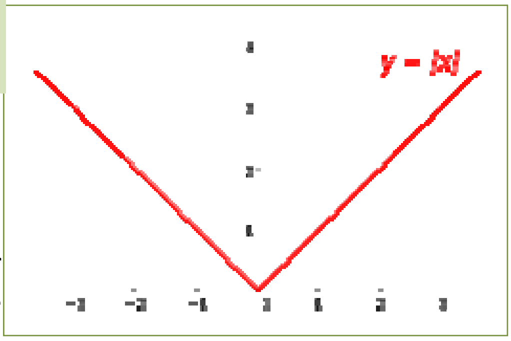
Elegido el origen de coordenadas y el tamaño de la unidad (o lo que es igual, si colocamos el 0 y el 1) todo número real ocupa una posición en la recta numérica y al revés, todo punto de la recta se puede hacer corresponder con un número real.

1.3. Valor absoluto. Distancia en la recta real

El valor absoluto o módulo de un número, equivale al valor de ese número ignorando el signo. Por ejemplo, el valor absoluto de –1 es 1, y el valor absoluto de +1, también es 1.

En lenguaje formal, el valor absoluto se define de la siguiente manera.

$$|x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$



Si representamos esta función en un eje de coordenadas, resulta una gráfica como la del margen.

Como el valor absoluto es una función muy importante en matemáticas, tiene su propio símbolo. Para escribir el valor absoluto de un número x, basta con encerrar el número entre dos barras: $|x|$.

El valor absoluto de un número x se consigue suprimiendo el signo, y se anota mediante el símbolo $|x|$.

Ejemplo:

- El valor absoluto de –49 es 49, igual que el valor absoluto de +49. Escrito en lenguaje formal:

$$|-49| = 49 = |+49|.$$

El valor absoluto se utiliza principalmente para definir cantidades y distancias en el mundo real. Los números negativos son una construcción matemática que se utiliza en el cálculo, pero en la realidad no existen cantidades negativas. No podemos viajar una distancia de –100 kilómetros, o comer –3 caramelos. Esto se debe a que el tiempo solo discurre en una dirección (positiva por convención)

El valor absoluto se usa para expresar cantidades o longitudes válidas en el mundo real, como la distancia.

Ejemplo:

- Hago un viaje de ida y vuelta hasta una ciudad que se encuentra a 40 km de mi casa. Después de

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo

hacer el viaje, estoy en el mismo punto, así que mi posición no habrá cambiado, esto es:

Posición = 40 km – 40 km = 0.

Esto no quiere decir que no haya recorrido una distancia. Hay dos cantidades a tener en cuenta, una distancia de ida y otra de vuelta, en total será:

L = |40| km + |–40| km = 80 km.

Recuerda que:

Las propiedades del valor absoluto son:

- No negatividad: $|a| \geq 0$.
- Simetría: $|a| = |-a|$
- Definición positiva: $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$.
- Valor absoluto y producto: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- Desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Distancia en la recta real

Una distancia es una medida que tiene unas determinadas propiedades: 1) No negatividad. 2) Simetría. 3) Propiedad triangular.

La distancia entre dos números reales x e y se define como:

$$\mathbf{Dist}(x, y) = |x - y|.$$

Verifica las propiedades antes indicadas pues:

1) Al estar definida con el valor absoluto es siempre un número no negativo. Es más, para que la distancia entre dos puntos valga cero, sólo es posible si los dos puntos son coincidentes:

$$0 = \text{Dist}(x, y) = |x - y| \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y.$$

2) Simetría: $\text{Dist}(x, y) = |x - y| = |y - x| = \text{Dist}(y, x)$.
3) Propiedad triangular: $\text{Dist}(x, y) \leq \text{Dist}(x, z) + \text{Dist}(z, y)$.

Ejemplo:

- *Representa en la recta real los ejemplos anteriores y comprueba el valor de su distancia*
- *Si estamos en el sótano 9º y subimos al piso 5º, ¿Cuántos pisos hemos subido?*

Como hemos visto en el ejemplo anterior, hemos subido en total 14 pisos.

$$\text{Dist}(-9, 5) = |5 - (-9)| = |5 + 9)| = |14| = 14.$$

- *Si el termómetro marca –1º y luego marca 5º, ¿cuántos grados ha subido la temperatura?*

Como hemos visto en el ejemplo anterior, la temperatura ha subido 6º.

$$\text{Dist}(-1, 5) = |5 - (-1)| = |5 + 1)| = |6| = 6.$$

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.4. Intervalos y entornos

Recuerda que:

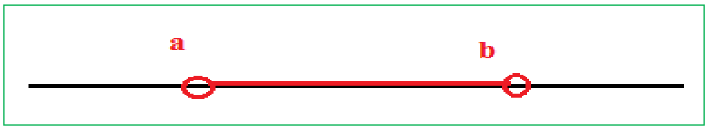
Un intervalo de números reales es el conjunto de números correspondientes a una parte de la recta numérica, en consecuencia, un intervalo es un subconjunto del conjunto de los números reales.

Tipos de intervalos

Intervalo abierto: es aquel en el que los extremos no forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos forman parte del intervalo, salvo los propios extremos.

En otras palabras $I = (a, b) = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$, observa que se trata de desigualdades estrictas.

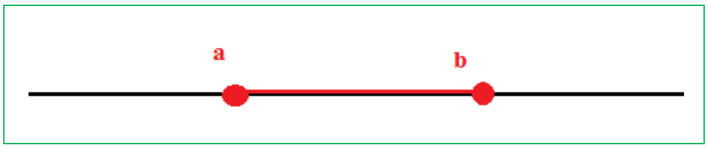
Gráficamente, lo representamos en la recta real del modo siguiente:



Intervalo cerrado: es aquel en el que los extremos si forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluidos éstos, forman parte del intervalo.

En otras palabras $I = [a, b] = \{x \in \Re \mid a \le x \le b\}$, observa que ahora no se trata de desigualdades estrictas.

Gráficamente:

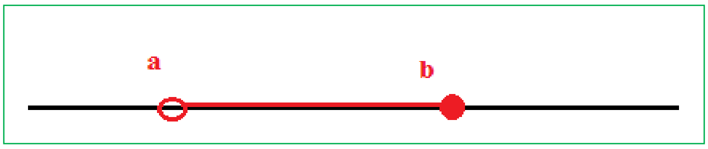


Intervalo semiabierto: es aquel en el que solo uno de los extremos forma parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluido uno de éstos, forman parte del intervalo.

Intervalo semiabierto por la izquierda, el extremo inferior no forma parte del intervalo, pero el superior si, en otras palabras:

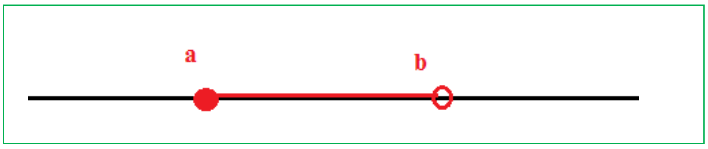
$$I = (a, b] = \{x \in \Re \mid a < x \le b\},$$

observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.



Intervalo semiabierto por la derecha, el extremo superior no forma parte del intervalo, pero el inferior si, en otras palabras $I = [a, b) = \{x \in \Re \mid a \le x < b\}$, observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.

Gráficamente:



Semirrectas reales

Semirrecta de los números positivos $S = (0, \infty)$, es decir, desde cero hasta infinito.

Semirrecta de los números negativos $S = (-\infty, 0)$, es decir, desde el menos infinito, el infinito negativo, hasta cero.

Con lo que toda la recta de los números reales es $\Re = (-\infty, \infty)$.

A una semirrecta se la puede considerar como un intervalo infinito.

Entornos

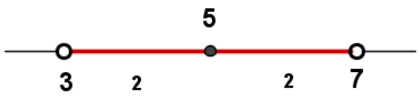
Es una forma especial de expresar los intervalos abiertos.

Se define el entorno de centro a y radio r y se denota $\boldsymbol{E(a\ ,\ r)}$ (otra forma usual es $E_r(a)$) como el conjunto de números que están a una **distancia de *a* menor que *r***.

Con un ejemplo se entenderá mejor:

Ejemplo:

- El entorno de centro 5 y radio 2 son los números que están de 5 una distancia menor que 2. Si lo pensamos un poco, serán los números entre 5 – 2 y 5 + 2, es decir, el intervalo (3, 7). Es como coger el compás y con centro en 5 marcar con abertura 2.

$\boldsymbol{E(5,2) = (3,7) \Rightarrow}$ 

Fíjate que el 5 está en el centro y la distancia del 5 al 7 y al 3 es 2.

$$\boldsymbol{E(a\ ,\ r) = (a - r\ ,\ a + r)}$$

Ejemplo:

- $E(2\ ,\ 4) = (2 - 4\ ,\ 2 + 4) = (-2\ ,\ 6)$

Es muy fácil pasar de un entorno a un intervalo. Vamos a hacerlo al revés.

Ejemplo:

- *Si tengo el intervalo abierto* (3, 10), ¿cómo se pone en forma de entorno?

Hallamos el punto medio $\frac{3+10}{2} = \frac{13}{2}$ = 6,5 que será el centro del entorno. Nos falta hallar el radio:

(10-3):2 = 3,5 es el radio (la mitad del ancho). Por tanto $(3\ ,\ 10) = \mathrm{E}(6{,}5\ ;\ 3{,}5)$

En general:

El intervalo $(b\ ,\ c)$ es el entorno $E\left(\frac{b+c}{2}, \frac{c-b}{2}\right)$.

Ejemplo:

- *El intervalo* $(-8,\ 1)$ = $E(\frac{-8+1}{2}, \frac{1-(-8)}{2}) = E(-3{,}5; 4{,}5)$

También existen los entornos cerrados pero son de uso menos frecuente.

Actividades propuestas

1. Dados los intervalos:

$$A = \{x \in R / -10 \le x < 1\}; B = \{x \in R / \frac{1}{2} < x \le 3\}; C = R - (1,2)$$

Se pide:

a) Representarlos en la recta real.

b) Calcular sus longitudes.

c) Calcular: $A \cup B, A \cap B, A \cup C, (A \cap C) \cup B, A \cup B \cup C, A \cap B \cap C$

2. Escribe y representa en la recta real los conjuntos siguientes:

-Un entorno del punto 7 y radio 2

-Un entorno del punto -2 y radio 1

-Un entorno del punto 1 y radio $\sqrt{3}$

-Un entorno del punto $\sqrt{2}$ y radio 3

3. Representa aproximadamente, en la recta real los números: 0,3; –8; $\sqrt{3}$; 1,222…; 3,5; $\sqrt{7}$; 1/7;3,777….

4. Escribe dos números con las condiciones siguientes:

a) Mayores que 0,12 y menores que 0,13.

b) Comprendidos entre 2,35 y 2,36.Comprueba que la diferencia entre estos números y 2,36 es menor que una centésima.

1.5 APROXIMACIÓN DE UN NÚMERO DECIMAL.

Hay veces en que es necesario hacer aproximaciones por motivos prácticos (no le vamos a decir al tendero que nos dé 2π metros de cuerda por la cuenta que nos trae) y a trabajar con números aproximados por, entre otros motivos, no conocer los valores exactos. Así por ejemplo, si nos pesamos es una báscula y marca 65,4 Kg, ¿cuánto pesamos exactamente? No se puede saber, es imposible, lo máximo que podemos decir es que nuestro peso está entre 65,3 y 65,5 Kg si el error máximo es de 100 gramos.

Error Absoluto

Se define el **error absoluto** (EA) como EA = $|valor\ real - valor\ aproximado|$.

Las barras significan "valor absoluto" que ya sabes que quiere decir que en caso de ser negativo lo convertimos a positivo.

Ejemplo:

Si aproximamos π por 3,1416 tendremos que el EA = $|\pi - 3{,}1426| = |-0{,}0000073...| \approx 0{,}0000073$ unas 7 millonésimas.

Cota del Error Absoluto

Para calcular el error absoluto es preciso conocer el valor real, lo que muchas veces es imposible. Pero siempre podemos poner una cota (un valor máximo) al error absoluto sólo teniendo en cuenta el orden de aproximación, así, si hemos redondeado en las diezmilésimas (como en el ejemplo) siempre podemos afirmar que el EA $\le$ 0,00005, es decir, menor o igual que media unidad del valor de la cifra de redondeo o 5 unidades de la siguiente (5 cienmilésimas), que es lo mismo.

Actividades resueltas

- *Calcula la cota del error absoluto de:*

N $\approx$ 2,1 $\Rightarrow EA \le 0,05$

$N \approx 600 \Rightarrow EA \le 50$ si suponemos que hemos redondeado en las centenas.

Cuándo no se conoce el valor real, no puede conocerse el valor absoluto, pero si una cota. Si un cronómetro tiene una precisión de décimas de segundo diremos que el EA $\le$ 0,05 s (media décima o 5 centésimas)

Si tenemos un número A y la cota del error absoluto es ΔA (se lee incremento de A) suele ponerse $A \pm \Delta A$ sobre todo en las Ciencias Experimentales.

Error Relativo.

Para comparar errores de distintas magnitudes o números se define el error relativo (ER) como:

$$\text{ER} = \frac{EA}{|Valor\ real|}$$

que suele multiplicarse por 100 para hablar de % de error relativo.

Si no se conoce el valor real se sustituye por el valor aproximado (la diferencia normalmente es pequeña).

Actividades resueltas

- Si aproximamos raíz de 3 por 1,73, el error relativo cometido es:

$$\sqrt{3} \approx 1,73 \Rightarrow EA \approx 0,0021 \Rightarrow ER = \frac{0,0021}{\sqrt{3}} \approx 0,00121 \Rightarrow 0,121\%$$

Si en la última división ponemos el valor aproximado 1,73 el ER sale aproximadamente 0,121%.

- En las aproximaciones A = 5,2 con EA $\le 0,05$ y B = 750 con EA $\le$ 5, ¿en cuál estamos cometiendo proporcionalmente menor error?

Calculamos los errores relativos:

A➔ ER $\le \frac{0,05}{5,2} \Rightarrow ER \le 0,0096 \Rightarrow ER \le 0,96\%$

B➔ER $\le \frac{5}{750} \Rightarrow ER \le 0,0067 \Rightarrow ER \le 0,67\%$

Es mejor aproximación la de B.

Control del error cometido:

Actividades resueltas

- Tenemos dos números **redondeados** a las décimas: A = 2,5 y B = 5,7

Vamos a hacer operaciones con ellos controlando los errores.

Como el EA $\leq$ 0,05 (recuerda: si redondeamos en las décimas el error será inferior o igual a 5 centésimas) tenemos que A puede estar entre 2,45 y 2,55; igualmente B estará entre 5,65 y 5,75.

Suma:

El valor más pequeño será 2,45 + 5,65 = 8,1; el valor máximo será 2,55 + 5,75 = 8,3. Si restamos da 0,2. Si tomamos como valor de la suma 8,2, que es la media, ahora el EA $\leq$ 0,1 (la mitad de la diferencia entre el máximo y el mínimo, fíjate en que 8,2 está a distancia 0,1 de 8,1 y de 8,3) cuando antes era inferior a 0,05. Ya no podemos estar seguros del último decimal. Con la resta pasa lo mismo.

Mínimo 5,65 – 2,55 = 3,1 (¡OjO!, el menor menos el mayor). Máximo 5,75 – 2,45 = 3,3. La media es 3,2 y como (3,3 – 3,1) : 2 = 0,1 el EA $\leq$ 0,1

En cada suma o resta el error absoluto es la suma de los errores absolutos (demuéstralo).

Si hacemos varias sumas y restas, pues aumentará peligrosamente.

Actividades resueltas

- Medimos el radio de una circunferencia con una regla milimetrada y marca 7,0 cm. Queremos calcular el área del círculo. El error máximo en el radio es de 0,05 cm luego puede estar entre 6,95 y 7,05. Si aplicamos la fórmula πr^2 para estos valores obtenemos 151,7 y 156,1, que son los valores mínimo y máximo. La diferencia es 4,4 y su mitad es 2,2 que es la cota de error absoluto. Diremos que

  $$A = 153{,}9 \pm 2{,}2\ cm^2.$$

  La cota del error relativo $\frac{2,2}{153,9}\cdot 100$ = 1,4 %.

  El radio tenía una cota de (0,05 : 7)·100 = 0,71 %, luego hemos perdido precisión.

Si operamos con números aproximados, y peor aún, si lo hacemos en repetidas ocasiones, los errores se van acumulando hasta el punto de poder hacerse intolerables.

Actividades propuestas

1. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hasta las centésimas y halla los errores absoluto y relativo cometidos.

2. Halla una cota del error absoluto en las siguientes aproximaciones:

a) 2,1 b) 123 c) 123,00 d) 4000 con redondeo en las decenas.

3. Una balanza tiene un error inferior o igual a 50 g en sus medidas. Usamos esa balanza para elaborar 10 paquetes de azúcar de 1 Kg cada uno que son un lote. Determina el peso mínimo y máximo del lote. ¿Cuál es la cota del error absoluto para el lote?

2. POLINOMIOS.

2.1. Definición. Términos. Grado. Valor numérico

Recuerda que:

Un **monomio** viene dado por el producto de números reales e indeterminadas. Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número real que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas; la indeterminada, o indeterminadas, conforman la **parte literal** del monomio.

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios. El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{7}\cdot x^2 - 32\cdot x^3 + 8$ *es un polinomio de grado 3 en la variable* x.
- $-5\cdot y^4 + 6\cdot x^2 + 11\cdot x$ *es un polinomio de grado 4 en las indeterminadas* x *e* y.
- $3\cdot x^2\cdot y^3 - 2 + 5\cdot y^2$ *es un polinomio de grado 5 en* x *e* y.
- $8x - 9\cdot y + 3\cdot z$ *es un polinomio de grado 1 en* x, y *y* z.

Tanto en esta sección como en la siguiente nos limitaremos, básicamente, a considerar polinomios con una única variable.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números reales.

Decimos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Los términos de un polinomio vienen determinados por el número de monomios que tenga ese polinomio.

Recuerda que:

Monomio: *mono: uno, nomio: término*: 1 término

Binomio: *bino: 2 dos, nomio: término:* 2 términos

Trinomio: *trino: tres, nomio: término* : 3 términos.

Cuatrinomio: *cuatri: cuatro, nomio: término*: cuatro términos.

A partir de cuatrinomio se les nombra polinomios: *Poli: varios, nomio: términos.*

Así por ejemplo:

- $4y^3 + 3y - 7$ está formado por 3 monomios $4y^3$, $3y$, -7 por lo tanto tendrá **tres términos.**
- $-3y^4 + 8x^2 + 5x$ está formado por 3 monomios, $-3y^4$, $8x^2$ y $5x$, por lo tiene 3 términos.

Si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número real el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable.

Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número –5 la denotamos por $p(-5)$, y leemos *"p de menos cinco"* o *"p en menos cinco"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o $p(x)$ indistintamente.

De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número real otro número real.

Ejemplos:

- *Si evaluamos el polinomio* $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ *en* $x=5$ *nos encontramos con el número*

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

- *El valor del polinomio* $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ *para* $y = -1$ *es*

$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

2.2. Operaciones con polinomios

Ya sabes que:

Suma y resta de polinomios:

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Ejemplos:

- *La suma de los polinomios* $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ *y* $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ *es el polinomio*

$$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2-6) =$$
$$= (-3-1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2-6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

- $(7x^2 - 5x + 3) + (2x^2 + 9x - 8) = (7x^2 + 2x^2) + (-5x + 9x) + (3 - 8) = 9x^2 + 4x - 5$

- En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 2x^5 & +6x^4 & +3x^3 & -11x^2 & +5x & +6 \\
+ & -9x^5 & & +4x^3 & +11x^2 & -9x & -7 \\
\hline
 & -7x^5 & +6x^4 & +7x^3 & & -4x & -1
\end{array}$$

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Propiedades de la suma de polinomios

Propiedad conmutativa. Si p y q son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de sumarlos:

$$p+q \equiv q+p$$

Ejemplo:

- $(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$
- $(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden sumar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p+q)+r \equiv p+(q+r)$$

Ejemplo:

- $(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+5x+2)+(x+6)=(2x^3-2x^2+2+x^4+7x^2+5x+2)+(x-6)=$
  $=(x^4+2x^3+5x^2+5x+2)+(x+6)=x^4+2x^3+5x^2+6x+8$

También:

- $(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+5x+2)+(x-6)=(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+5x+2+x+6)=$
  $=(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+6x+8)=x^4+2x^3+5x^2+6x+10$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: el resultado de sumarlo con cualquier otro siempre es éste último. Se trata del polinomio dado por el número 0, el ***polinomio cero***.

Ejemplo:

- $(5x^3+4x^2-3x+1)+0=0+(5x^3+4x^2-3x+1)=(5x^3+4x^2-3x+1)$
- $0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$

Elemento opuesto. Cada polinomio tiene asociado otro, al que llamaremos su ***polinomio opuesto***, tal que la suma de ambos es igual al polinomio cero. Alcanzamos el polinomio opuesto de uno dado, simplemente, cambiando el signo de cada monomio.

Ejemplo:

- El polinomio opuesto de $p \equiv -3x^4+5x^3+2x-7$ es $3x^4-5x^3-2x+7$, al que denotaremos como "$-p$". Ratifiquemos que su suma es el polinomio cero:

$$(-3x^4+5x^3+2x-7)+(3x^4-5x^3-2x+7)=(-3x^4+3x^4)+(5x^3-5x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0$$

Resta de polinomios:

Recordemos que el polinomio *opuesto* de otro se obtiene simplemente cambiando el signo de cada monomio. Esta acción se corresponde con multiplicar por el número “-1” el polinomio original. De esta forma el polinomio opuesto de p es

$$-p \equiv (-1)\cdot p$$

En este momento aparece de manera natural la **operación diferencia**, o **resta**, de polinomios. La definimos con la ayuda del polinomio opuesto de uno dado:

$$p-q \equiv p+(-q) \equiv p+(-1)\cdot q$$

La resta consiste en sumar a un polinomio el opuesto de otro.

Ejemplo:

- Dado el polinomio: $p \equiv 2x^4-3x^2+6$ y el polinomio: $q \equiv -7x^4+6x^2+7$.

Vamos a restar $p - q$:

El proceso es el mismo que para la suma, lo único que cambia es que a p le sumamos el opuesto de q:

Es decir a q le cambiamos de signo y se lo sumamos a p:

$(2x^4-3x^2+6)-(-7x^4+6x^2+7)=(2x^4-3x^2+6)+(7x^4-6x^2-7)=9x^4-5x^2-1$.

Recordemos que el opuesto de q es $-q$, $(7x^4-6x^2-7)$.

Ejemplo:

- $$\begin{aligned}&(-5x^2-3x+2)-(-2x^4+x^3+3x^2+6)=(-5x^2-3x+2)+(2x^4-x^3-3x^2-6)=\\&=2x^4-x^3+(-5x^2-3x^2)-3x+(2-6)=2x^4-x^3-8x^2-3x-4\end{aligned}$$

Actividades propuestas

5. Realiza la suma y resta de los siguientes polinomios:

a) x^2-2 b) $3x^4+x^3-1$

6. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(x^2-x)+(-2x^2-3x+1)+(2x^3-2x^2+x-2)$

b) $-x^4+(x^3+2x-3)+(-3x^2-5x+4)+(2x^3-x+5)$

7. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $2x^4-6x^3+4x^2+4x-1$

b) $-7x^3-6x+5$

c) $-x^4+3x^2-8x+7$

8. Considera los polinomios $p \equiv +x^3-6x+2$, $q \equiv 3x^2+3x+1$, así como el polinomio suma

$s \equiv p+q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x=-2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

9. Obtén el valor del polinomio $p \equiv -x \ -5x^3+2x-2$ en $x=3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x=3$?

10. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(-4x^3+2x)-(-3x^2)$

b) $(2x^4+x)-(-3x-4)$

c) $(3x^2-x)-(2x^3+x^2-x)$

Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella toma valores en los números reales, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto de los números reales, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Ejemplos:

a) $6x^2\cdot(-2x^4)=6\cdot(-2)\cdot x^{2+4}=-12x^6$

b) $5x^3\cdot(-4)=5\cdot(-4)\cdot x^3=-20x^3$

c) $3x^2\cdot(2x^2-4x+6)=(3x^2\cdot 2x^2)-(3x^2\cdot 4x)+(3x^2\cdot 6)=6x^4-12x^3+18x^2$

d) $(-x^3+3x-1)\cdot(-2x)=(-x^3)\cdot(-2x)+(3x)\cdot(-2x)+(-1)\cdot(-2x)=2x^4-6x^2+2x$

e) $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x)\cdot(x^2-4x-5)+(-2)\cdot(x^2-4x-5)=$
$(3x^3-12x^2-15x)+(-2x^2+8x+10)=$
$=3x^3+(-12x^2-2x^2)+(-15x+8x)+10=3x^3-14x^2-7x+10$

f) $(x+6)\cdot(x^2-2x)=(x+6)\cdot x^2+(x+6)\cdot(-2x)=(x^3+6x^2)+(-2x^2+12x)=x^3+6x^3-2x^2+12x$

Ejemplo:

- *También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:*

$$
\begin{array}{r}
-2x^3+x+4 \\
\times \qquad x^2-3x+1 \\
\hline
-2x^3 \qquad +x+4 \\
6x^4 \qquad -3x^2-12x \quad \\
-2x^5 \qquad +x^3+4x^2 \qquad\qquad \\
\hline
-2x^5+6x^4-x^3+x^2-11x+4
\end{array}
$$

Actividades propuestas

11. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(5x^3-2x)\cdot(-4x^3)$

b) $(2x^4+x)\cdot(-3x-4)$

c) $(2x^5+x^3-x^2)\cdot(3x^2-x)$

d) $(-1)\cdot(7x^3-4x^2-3x+1)$

12. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

a) $4x^3+3x^3+2x^2$

b) $-2x^3+x^2-1$

c) $-x^2+x-7$

13. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x\cdot(2x^3+4x^2-6)$

b) $(3x-4)\cdot(4x+6)$

c) $(2a^2-5b)\cdot(4b-3a^2)$

d) $(3a-6)\cdot(8-2a)\cdot(9a-2)$

Propiedades del producto de polinomios

Propiedad conmutativa. Si p y q son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de multiplicarlos:

$$p\cdot q\equiv q\cdot p$$

Ejemplo:

- $(2x^2-7)\cdot(-x^4+x^2)=2x^2\cdot(-x^4+x^2)-7\cdot(-x^4+x^2)=-2x^6+2x^4+7x^4-7x^2=-2x^6+9x^3-7x^2$

$$(-x^4+x^2)\cdot(2x^2-7)=-x^4\cdot(2x^2-7)+x^2\cdot(2x^2-7)=-2x^6+7x^4+2x^4-7x^2=-2x^6+9x^4-7x^2$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden multiplicar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p\cdot q)\cdot r \equiv p\cdot(q\cdot r)$$

Ejemplo:

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

También:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right)=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: al multiplicarlo por cualquier otro siempre nos da éste último. Se trata del polinomio dado por el número 1, el *polinomio unidad*.

Ejemplo:

- $1\cdot(-8x^2-2x+3)=(-8x^2-2x+3)\cdot 1=-8x^2-2x+3$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Cuando en una multiplicación de polinomios uno de los factores viene dado como la suma de dos polinomios como, por ejemplo,

$$(8x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$(8x^2-x)\cdot\left((-2x+11)+(x^3-4x)\right)=(8x^2-x)\cdot\left(x^3-6x+11\right)=$$
$$=8x^5-48x^3+88x^2-x^4+6x^2-11x=8x^5-x^4-48x^3+94x^2-11x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$(8x^2-x)\cdot\left((-2x+11)+(x^3-4x)\right)=(8x^2-x)\cdot(-2x+11)+(8x^2-x)\cdot(x^3-4x)=$$
$$=(-16x^3+88x^2+2x^2-11x)+(8x^5-32x^3-x^4+4x^2)=8x^5-x^4-48x^3+94x^2-11x$$

Comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

En general, la **propiedad distributiva** de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$p\cdot(q+r)\equiv(p\cdot q)+(p\cdot r)$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente se denomina **sacar factor común**.

Ejemplo:

$$6x^6-10x^4-22x^3+2x^2=(3x^4-5x^2-11x+1)\cdot 2x^2$$

Actividades propuestas

14. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2 \cdot (-5x^4 - 3x^2 + 1) \cdot 2x^3$

b) $(2x^2 - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$

15. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-16x^4 - 20x^3 + 10x^2$

b) $24x^4 - 30x^2$

Productos notables de polinomios

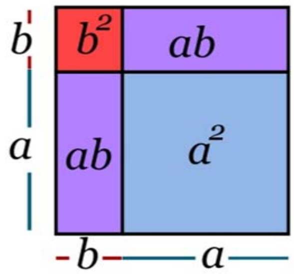
En este apartado vamos a destacar una serie de productos concretos de polinomios que surgen frecuentemente. Podemos exponerlos de muy diversas formas. Tal y como lo haremos, aparecerá más de una indeterminada; hemos de ser capaces de apreciar que si, en un algún caso concreto, alguna indeterminada pasa a ser un número concreto esto no hará nada más que particularizar una situación más general.

Potencias de un binomio. Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los oportunos cálculos:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

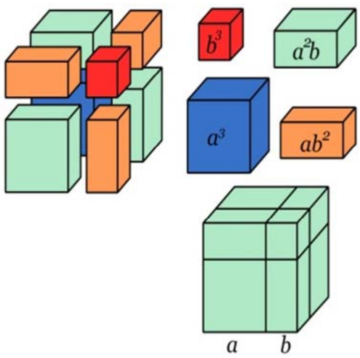
Comprueba la igualdad a partir de los cuadrados y rectángulos de la ilustración.



- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Observa la figura y conéctala con la igualdad.



- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica la igualdad con los cubos y prismas de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada uno de los desarrollos, el exponente del binomio coincide con el grado de cada uno de los monomios.

Ejemplos:

a) $(a+2)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 2 + 2^2 = a^2 + 4a + 4$

b) $(x-5)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

c) $(7x+5)^2 = (7x)^2 + 2\cdot 7x\cdot 5 + (5)^2 = 49x^2 + 70x + 25$

d) $(x-3y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3y + (3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$

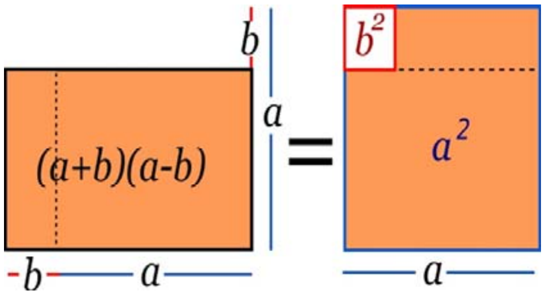
e) $(4x-5)^3 = (4x)^3 - 3\cdot(4x)^2\cdot 5 + 3\cdot(4x)\cdot 5^2 - 5^3 = 64x^3 - 60x^2 + 30x - 125$

Suma por diferencia. De nuevo la siguiente igualdad se obtiene tras efectuar el producto señalado:

- $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

Observa las figuras y conéctalas con la igualdad.



Ejemplos:

a) $(a+5)\cdot(a-5) = a^2 - 5^2 = a^2 - 25$

b) $(x+1)\cdot(x-1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$

c) $(3x+4)\cdot(3x-4) = (3x)^2 - 4^2 = 9x^2 - 16$

d) $(-3x-5)\cdot(-3x+5) = (-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5) = (-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x) =$

$= (-1)\cdot(5^2 - (3x)^2) = -25 + 9x^2$

Actividades propuestas

16. Realiza los cálculos:

a) $(2+3a)^2$

b) $(-x+3)^2$

c) $(-3x+2)^2$

d) $(x^2-1)^3$

e) $(4x^2+2)^3$

17. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

a) $(a+b+c)^2$ b) $(a+b-c)^2$

18. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x - 5y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x^2 – 5/x)^2$

d) $(3a – b)^2$ e) $(a^2 + b^2)^2$ f) $(3/5y – 2/y)^2$

19. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^4 + 6a^2 + 9$ b) $9x^2 – 6x + 1$ c) $b^2 – 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 – 2a^2 +1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

20. Efectúa estos productos:

a) $(4x^2+3y)\cdot(4x^2-3y)$

b) $(2x^2+8)\cdot(2x^2-8)$

c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

División de polinomios

Ya sabes que:

Analicemos con detenimiento la división de dos números enteros positivos. Cuando dividimos dos números, D (dividendo) entre d (divisor, distinto de 0), surgen otros dos, el cociente (c) y el resto (r). Ellos se encuentran ligados por la llamada *prueba de la división*:

$$D=d\cdot c+r$$

Alternativamente:

$$\frac{D}{d}=c+\frac{r}{d}$$

Además, decimos que la división es exacta cuando $r=0$.

El conocido algoritmo de la división persigue encontrar un número entero, el cociente c, tal que el resto r sea un número menor que el divisor d, y mayor o igual que cero. Fijémonos en que, sin esta exigencia para el resto r, podemos escoger arbitrariamente un valor para el cociente c el cual nos suministra su valor asociado como resto r.

En efecto, si tenemos como dividendo $D = 672$ y como divisor $d = 12$, "si queremos" que el cociente sea $c = 48$ su resto asociado es

$$r=D-d\cdot c=672-12\cdot 48=672-576=96$$

y la conexión entre estos cuatro números es

$$672=12\cdot 48+96$$

Esta última "lectura" de la división de números enteros va a guiarnos a la hora de dividir dos polinomios.

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, la división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, nos proporcionará otros dos polinomios, el polinomio cociente $c(x)$ y el polinomio resto $r(x)$.

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

También aquí pesará una exigencia sobre el polinomio resto: su grado deberá ser menor que el grado del polinomio divisor. La relación entre los cuatro será, naturalmente,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

También escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Al igual que ocurre con el algoritmo de la división entera, el algoritmo de la división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada una de las cuales aparecen unos polinomios cociente y resto "provisionales" de forma que el grado de esos polinomios resto va descendiendo hasta que nos topamos con uno cuyo grado es inferior al grado del polinomio divisor, lo que indica que hemos concluido. Veamos este procedimiento con un ejemplo concreto

Ejemplo:

- Vamos a dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Como el polinomio divisor, $q(x)$, es de grado 2, debemos encontrar dos polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, y un polinomio resto $r(x)$ de grado 1 o 0, tales que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

- *Primera etapa:*

Para poder lograr la igualdad $p \equiv q \cdot c + r$, como el grado de $r(x)$ será 1 o 0, el término de mayor grado de $p(x)$, $6x^4$, surgirá del producto $q(x) \cdot c(x)$. Así obtenemos la primera aproximación de $c(x)$, su monomio de mayor grado:

$$c_1(x) = 3x^2$$

y, de manera automática, también un primer resto $r_1(x)$:

$$\begin{array}{rl} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \underline{|\ \ 2x^2 - x + 3} \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\qquad & 3x^2 \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \end{array}$$

Como este polinomio $r_1(x)$ es de grado 3, mayor que 2, el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- *Segunda etapa:*

Esta segunda etapa consiste en dividir el polinomio $r_1(x) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$, surgido como resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. Es decir, repetimos lo hecho antes pero considerando un nuevo polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

Al igual que antes, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. Como el término de mayor grado de $r_1(x)$, $8x^3$, sale del producto $q(x) \cdot c_2(x)$, es necesario que el polinomio cociente contenga el monomio

$$c_2(x) = 4x$$

Ello nos lleva a un segundo resto $r_2(x)$:-4x^2-9x-2

Como este polinomio $r_2(x)$ es de grado 2, igual que el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- *Primera y segunda etapas:*

$$\begin{array}{rl}
6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \lfloor\, 2x^2 - x + 3 \\
\underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\qquad\quad & 3x^2 + 4x \\
8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\
\underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \quad\; & \\
-4x^2 - 9x - 2 &
\end{array}$$

- *Tercera etapa:*

Esta tercera etapa consiste en dividir el polinomio $r_2(x) = -4x^2 - 9x - 2$, el resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. De nuevo repetimos el algoritmo pero con otro polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

Perseguimos que $r_2 \equiv q \cdot c_3 + r$. Como en cada paso, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. El término de mayor grado de $r_2(x)$, $-4x^2$, surge del producto $q(x) \cdot c_3(x)$, por lo que

$$c_3(x) = -2$$

y el tercer resto $r_3(x)$ es: -11x+4

Como este polinomio $r_3(x)$ es de grado 1, menor que 2, grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto sí es el definitivo. Hemos concluido:

- *Las tres etapas:*

$$\begin{array}{rl}
6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \lfloor\, 2x^2 - x + 3 \\
\underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\qquad\quad & 3x^2 + 4x - 2 \\
8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\
\underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \quad\; & \\
-4x^2 - 9x - 2 & \\
\underline{4x^2 - 2x + 6} & \\
-11x + 4 &
\end{array}$$

Conclusión: al dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$

obtenemos como polinomio cociente $c(x)=3x^2+4x-2$ y como polinomio resto $r(x)=-11x+4$.

Actividades propuestas

21. Divide los siguientes polinomios:

a) $2x^4-x^2-x+7$ entre x^2+2x+4

b) $-10x^3-2x^2+3x+4$ entre $5x^3-x^2-x+3$

c) $4x^5-6x^3+6x^2-3x-7$ entre $-2x^3+x+3$

d) $-8x^5-2x^4+10x^3+2x^2+3x+5$ entre $4x^3+x^2+x-1$

e) $-6x^5+x^2+1$ entre x^3+1

22. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x)=x^2-x-3$ como polinomio cociente y $r(x)=-3x^2-1$ como resto.

2.3. Regla de *Ruffini*. Teorema del resto

Paolo Ruffini

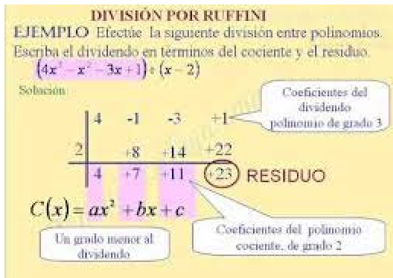
Debido a la importancia que tiene la división de polinomios cuando el polinomio divisor es de la forma $x-\alpha$, es conveniente agilizar tales divisiones.

Estamos ante la llamada **regla de *Ruffini***, un algoritmo que nos proporciona tanto el cociente como el resto que resultan de dividir un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x-\alpha$.

Veámoslo con un ejemplo:

Consideremos el polinomio $p(x)=3x^3-4x^2+x+3$. Vamos a dividirlo entre $x+2$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +x & +3 & \quad x+2 \\ \cline{5-5}
\underline{-3x^3} & \underline{-6x^2} & & & 3x^2-10x+21 \\
 & -10x^2 & +x & +3 & \\
 & \underline{10x^2} & \underline{+20x} & & \\
 & & 21x & +3 & \\
 & & \underline{-21x} & \underline{-42} & \\
 & & & -39 &
\end{array}
$$



Veamos cómo han surgido tanto el polinomio cociente como el resto. El que el grado del dividendo sea tres y que el divisor sea de grado uno impone que el cociente tenga grado dos y que el resto sea un número real. El cociente consta de los monomios $3x^2$, $-10x$ y 21, los cuales coinciden con los monomios de mayor grado de cada uno de los dividendos después de disminuir sus grados en una unidad: $3x^2$ procede de $3x^3-4x^2+x+3$ (el dividendo inicial), $-10x$ viene de $-10x^2+x+3$ y, por último, 21 de $21x+3$. Este hecho, coincidencia en el coeficiente y disminución del grado en una unidad, se debe a que el divisor, $x+2$, es mónico y de grado uno.

Seguidamente, vamos a tener en cuenta únicamente los coeficientes del dividendo, por orden de grado, 3, –4, 1 y 3; en cuanto al divisor, como es mónico y de grado uno, basta considerar su término independiente, +2, pero como el resultado de multiplicar los monomios que van conformando el cociente por el divisor hemos de restárselo a cada uno de los dividendos, atendiendo a este cambio de signo, en lugar del término independiente, +2, operaremos con su opuesto, –2, número que, a la vez, es la raíz del divisor $x+2$ y sobre el que pesa la pregunta de si es o no raíz de $p(x)$.

Este último concepto lo veremos más delante de manera detallada cuando definamos raíz de un polinomio.

Vamos a compararlo con el proceso de la división convencional y veremos que es igual:

- *Primer paso de la división:*

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2 \\ \quad\ -10x^2+\ x\ +3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & & \\ \hline & 3 & -10 & & \end{array}$$

Aparece en el cociente el monomio $3x^2$ (coeficiente 3), el cual provoca la "desaparición" de $3x^3$ en el dividendo y la aparición del monomio $-6x^2$ (coeficiente $-6=(-2)\cdot 3$). Después de operar (sumar) nos encontramos con $-10x^2$ (coeficiente $-10=(-4)+(-6)$) y, en el cociente $-10x$.

- *Segundo paso. El dividendo pasa a ser* $-10x^2+\ x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x \\ \quad\ -10x^2+\ x\ +3 & \\ \quad\ \ \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\qquad\ 21x+3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \end{array}$$

La irrupción en el cociente del monomio $-10x$ (coeficiente -10) provoca la "desaparición" de $-10x^2$ en el dividendo y la aparición del monomio $20x$ (coeficiente $20=(-2)\cdot(-10)$). Después de operar (sumar) nos encontramos con $21x$ (coeficiente $21=1+20$) y, en el cociente 21.

- *Tercer paso. El dividendo pasa a ser* $21x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x+21 \\ \quad\ -10x^2+\ x\ +3 & \\ \quad\ \ \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\qquad\ 21x+3 & \\ \qquad\quad\ \ \underline{-21x-42} & \\ \qquad\qquad\quad\ -39 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & 3 & -10 & 21 & -39 \end{array}$$

Tenemos en el cociente el término independiente 21. Éste provoca la eliminación de $21x$ en el dividendo y la aparición del término $-42=(-2)\cdot 21$. Después de operar (sumar) nos encontramos con el resto $-39=3-42$.

En cada uno de los pasos figura, en la parte derecha, lo mismo que se ha realizado en la división convencional, pero con la ventaja de que todo es más ágil debido a que únicamente se manejan números reales: los coeficientes de los distintos polinomios intervinientes.

Ejemplo:

- *Dividamos el polinomio* $p(x)=-x^4+2x^3-5x+4$ *entre* $x+3$*:*

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ -3 & & +3 & -15 & +45 & -150 \\ \hline & -1 & +5 & -15 & +50 & -146 \end{array}$$

Actividades propuestas

23. Usa la regla de *Ruffini* para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-3x^2+x+1$ entre $x-1$

b) x^4+2x^3-2x+1 entre $x-2$

c) $4x^3-3x^2-1$ entre $x+1$

d) x^3-9x+1 entre $x-3$

24. Estudia si es posible usar la regla de *Ruffini*, de alguna forma, para dividir x^3+2x^2+5x+7 entre $2x+3$.

Teorema del resto

El teorema del resto es muy útil para hallar los valores numéricos de los polinomios sin necesidad de sustituir directamente en ellos la incógnita por el número de que se trate. Haciendo uso de dicho teorema, podemos hallar las raíces de los polinomios, proceso que habrá que realizar con mucha frecuencia en lo sucesivo.

El enunciado del teorema del resto es el siguiente:

Teorema del resto. El valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ al particularizarlo en $x=\alpha$ coincide con el resto que aparece al dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

De esta forma, podremos saber de antemano si una división va a ser exacta sin necesidad de efectuarla.

Demostración:

Según vimos en el apartado de la división de polinomios, al dividir un polinomio $\mathrm{D}(x)$ entre otro, $\mathrm{d}(x)$, la relación que se establece es:

$$\mathrm{D}(x) = \mathrm{d}(x)\cdot \mathrm{c}(x) + \mathrm{r}(x)$$

donde $\mathrm{c}(x)$ y $\mathrm{r}(x)$ son respectivamente, el cociente y el resto de la división. En este caso estamos dividiendo por $x - a$, es decir, el divisor es $\mathrm{d}(x) = x - a$. Por tanto

$$\mathrm{D}(x) = (x - a) \cdot \mathrm{c}(x) + \mathrm{r}(x)$$

Hallamos el valor numérico del polinomio $\mathrm{D}(x)$ para $x = a$, para ello sustituimos la x por a:

$$\mathrm{D}(a) = (a - a) \cdot \mathrm{c}(a) + \mathrm{r}(a)$$

Y, por tanto, $\mathrm{D}(a) = \mathrm{r}(a) = r$, que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Ejemplo:

- *Dividamos el polinomio* $p(x) = -x^4 + 3x^3 - 5x + 4$ *entre* $x + 3$*:*

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & -1 & +3 & 0 & 5 & 4 \\
-3 & & +3 & -18 & +51 & -168 \\
\hline
 & -1 & +6 & -18 & +56 & \underline{|-164} \\
\end{array}$$

El cociente es $-x^3 + 6x^2 - 18x + 56$ y el resto -164

$$p(x) = -x^4 + 2x^3 - 5x + 4 = (x+3) \cdot (-x^3 + 6x^2 - 18x + 56) + (-164)$$

Si evaluamos $p(x)$ en $x = -3$ no puede dar cero, pero ¿qué valor resulta?

$$p(-3) = (-3+3) \cdot (-3)^3 - 6.(-3)^2 - 18 \cdot (-3) + 56) + (-164) = 0 + (-164) = -164$$

Naturalmente hemos obtenido el resto anterior, que vemos que coinciden, el valor numérico del polinomio y el resto de la división.

Actividades propuestas

25. Utiliza la regla de *Ruffini* para conocer el valor del polinomio $-3x^3 + 7x^2 + 2x + 4$ en $x = 5$.

2.4. Raíces de un polinomio:

Dado un polinomio $p(x)$ diremos que un número real concreto α es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio p, si al evaluar p en $x = \alpha$ obtenemos el número 0, esto es, si

$$p(\alpha) = 0$$

Ejemplo:

- *Consideremos el polinomio* $s(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8$.
  - El número 2 es una raíz de $s(x)$, puesto que

    $$s(2) = 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 8 = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 16 - 8 = 16 + 8 - 16 - 8 = 0$$

  - Otra raíz de $s(x)$ es el número -1:

    $$s(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) - 8 = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (+1) + 8 - 8 = -2 + 2 + 8 - 8 = 0$$

  - En cambio, el número 1 no es una raíz de $s(x)$:

$$s(1)=2\cdot 1^3+2\cdot 1^2-8\cdot 1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq 0$$

- Tampoco es raíz de $s(x)$ el número 0:

$$s(0)=2\cdot 0^3+2\cdot 0^2-8\cdot 0-8=0+0-0-8=-8\neq 0$$

Cálculo de las raíces de un polinomio

Ejemplos:

- *Comprobemos, mediante la regla de Ruffini, que* $\alpha=\dfrac{1}{2}$ *es raíz del polinomio* $2x^2-3x+1$*:*

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- *Para conocer las raíces del polinomio* x^2-2 *debemos estudiar si hay algún número real* α *tal que lo anule, es decir, para el que se tenga*

$$\alpha^2-2=0$$
$$\alpha^2=2$$
$$\alpha=\pm\sqrt{2}$$

Así, el polinomio de grado dos x^2-2 tiene dos raíces distintas, las cuales son números irracionales.

- *Ya sabemos que hay polinomios que carecen de raíces, como por ejemplo* x^2+4.

Para facilitar la comprensión de los conceptos y resultados de este asunto la mayoría de los números que han aparecido hasta ahora, coeficientes, raíces, etc., han sido números enteros. Por supuesto que podemos encontrarnos con polinomios con coeficientes racionales, o irracionales, o con polinomios con raíces dadas por una fracción o un número irracional. También existen polinomios que carecen de raíces.

Apreciamos que la regla de *Ruffini* nos informa sobre si un número concreto es o no raíz de un polinomio. Naturalmente, cuando estamos ante un polinomio, y nos interesa conocer sus raíces, no es posible efectuar una prueba con cada número real para determinar cuáles son raíz del polinomio. En el próximo párrafo destacaremos ciertos "números candidatos" a ser raíz de un polinomio.

A la hora de buscar las **raíces enteras de un polinomio** disponemos del siguiente resultado:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+......+a_2x^2+a_1x+a_0$$

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces enteras**, si las tuviera, se encuentran necesariamente entre los divisores enteros de su término independiente a_0.

Procedamos a su demostración. Supongamos que cierto número entero α es una raíz de ese polinomio. Tal número debe anularlo:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ...+ a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$
$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ...+ a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0$$
$$\alpha \cdot (a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ...+ a_2\alpha + a_1) = -a_0$$
$$a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ...+ a_2\alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

En la última igualdad, el número del lado izquierdo es entero, porque está expresado como una suma de productos de números enteros. Por ello, el número del lado derecho, $\frac{-a_0}{\alpha}$, también es entero. Al ser también enteros tanto $-a_0$ como α, alcanzamos que α es un divisor de a_0.

Ejemplos:

- Determinemos, con arreglo al anterior resultado, qué números enteros son candidatos a ser raíces del polinomio $7x^3 + 23x^2 - 2x - 6$:

  Tales números enteros candidatos deben ser divisores de -6, el término independiente del polinomio. Por ello, los únicos números enteros que pueden ser raíz de ese polinomio son:

  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

- Las únicas posibles raíces enteras del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ también son:

  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

En este caso 2 y –3 son raíces enteras del polinomio.

Algo más general podemos afirmar sobre clases de números y raíces de un polinomio:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_2x^2 + a_1x + a_0$$

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces racionales**, si las tuviera, necesariamente tienen por numerador algún divisor del término independiente, a_0, y por denominador algún divisor del coeficiente del término de mayor grado, a_n.

Ejemplos:

- En el polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ los números racionales candidatos a ser raíces suyas tienen por numerador a un divisor de -6 y por denominador a un divisor de 2. Por lo tanto, los únicos números racionales que pueden ser raíz de ese polinomio son:

  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 2}{2} = \pm 1,\ \frac{\pm 3}{2},\ \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

  Además de 2 y -3, también es raíz $\frac{-1}{2}$; los demás no lo son.

- Las únicas posibles raíces racionales del polinomio $2x^4+7x^3-11x^2-4x-3$ son:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 3}{2}$$

En este caso ninguno de esos números es raíz del polinomio.

Actividades propuestas

26. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\alpha = 3$ de x^3-4x^2+5

b) $\beta = -2$ de $-x^3-2x^2+x+2$

c) $\gamma = 1$ de $-2x^4+x+1$

d) $\sigma = -1$ de $2x^3+2x^2$

27. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) x^3-x^2+2x-2

b) $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$

c) $2x^3+x^2-18x-9$

d) $x^4+2x^3+3x^2+6x$

28. Comprueba que $\frac{-1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3+3x^2-11x-6$.

29. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $3x^2+4x-5$

b) $2x^3-9x^2+12x+2$

2.5. Factorización de polinomios:

Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales.

Basándonos en el cálculo de las raíces de un polinomio vamos a realizar el proceso de descomposición de un polinomio en forma de producto de otros polinomios más sencillos.(Factorización de un polinomio):

Nos vamos a basar en el siguiente enunciado:

La *condición necesaria y suficiente* para que un polinomio $P(x)$ sea divisible por $(x - a)$ es que a sea una raíz de $P(x)$.

Podemos reescribir este resultado de la siguiente manera:

Un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x - a) \Leftrightarrow a$ es una raíz de $P(x)$.

Vamos a demostrarlo:

Si $P(x)$ es divisible por $(x - a) \Rightarrow a$ es una raíz de $P(x)$: ***Condición necesaria***

En efecto: Si $P(x)$ divisible por $(x - a) \Rightarrow r = 0 \Rightarrow P(a) = 0$ (por el teorema del resto) $\Rightarrow a$ es raíz de $P(x)$

Si a es una raíz de $P(x) \Rightarrow (x - a)$ divide a $P(x)$: ***Condición suficiente***

En efecto: a raíz de $P(x) \Rightarrow P(a) = 0$ (por el teorema del resto).

El resto de la división de $P(x)$ entre $(x - a)$ es $0 \Rightarrow (x - a)$ divide a $P(x)$ por la definición de raíz.

Como consecuencia inmediata se tiene: si a es una raíz de $P(x) \Rightarrow P(x) = c(x)\,(x - a)$

El polinomio dado queda descompuesto en forma de producto de dos factores. Repitiendo el proceso para $c(x)$, éste se puede descomponer a su vez de nuevo y así sucesivamente.

Llegando al resultado general: Dado el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ cuyas n raíces son x_1, x_2, …, x_n ,dicho polinomio se puede descomponer factorialmente de la siguiente forma:

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Decimos que un polinomio es **reducible** si admite una factorización mediante polinomios de grado inferior al suyo. En caso contrario el polinomio será **irreducible**.

Ejemplo:

- Descomponer factorialmente el polinomio: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Como el coeficiente de x^3 es 1, según vimos en el apartado de cálculo de raíces de un polinomio, las posibles raíces racionales, de existir, han de ser divisores de 2.por tanto pueden ser: $+1, -1, +2, -2$.

Comprobamos si el 1 es raíz. Aplicamos el teorema de *Ruffini*:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

Por tanto, 1 es raíz y tenemos:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$$

Resolviendo ahora la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, resulta $x = 1$ y $x = 2$.

Por tanto, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ y en definitiva, el polinomio tendrá la siguiente descomposición factorial:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x - 1)(x - 2) = (x - 1)^2 (x - 2)$$

siendo sus raíces $x_1 = 1$, doble y $x_2 = 2$.

Hay polinomios que no admiten raíces, es decir, que no se anulan nunca.

Ejemplos:

- El polinomio $t(x) = x^2 + 4$ no tiene raíces puesto que al evaluarlo en cualquier número real α siempre nos da un valor positivo y, por lo tanto, distinto de 0:

$$t(\alpha) = \alpha^2 + 4 > 0$$

Además, este polinomio de grado dos, $t(x) = x^2 + 4$, es un polinomio irreducible porque, al carecer de raíces, no podemos expresarlo como producto de polinomios de menor grado.

- Otro polinomio sin raíces reales es $u(x) = (x^2+1)^2 = (x^2+1)\cdot(x^2+1) = x^4 + 2x^2 + 1$.

Actividades propuestas

30. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α.

a) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?

b) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?

c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4\cdot p_1(x)$?

31. Construye un polinomio de grado 4 tal que posea tres raíces distintas.

32. Determina un polinomio de grado 4 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

33. Construye un polinomio de grado 4 de forma que tenga una única raíz.

34. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

admite al número 0 como raíz.

35. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

admite al número 1 como raíz.

36. Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x+5$ b) $-x+3$ c) $7x-5$ d) $-3x-11$

e) $-7x$ f) x^2-8x g) $4x^2-x-3$ h) x^3-4x i) x^3+25x

2.6. Fracciones algebraicas

Una **fracción algebraica** es una expresión de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0$$

dónde tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son polinomios.

Ejemplos:

- *Así son fracciones algebraicas las siguientes expresiones:*

$$\frac{7x^3-2x}{6x^2+5x-9} \qquad \frac{4x^2-9x}{2x^2+33} \qquad \frac{3x^2y+2xy^2}{7xy}$$

Son expresiones algebraicas, son **fracciones algebraicas**. En general, no son un polinomio. Sólo lo es en el muy particular caso en el que el denominador es un número real diferente de cero, esto es, un polinomio de grado 0.

Es sencillo constatar que las expresiones anteriores no son un polinomio: cualquier polinomio puede tener un valor numérico para cualquier número real x. Sin embargo esas expresiones no pueden ser evaluadas para los valores que anulan el denominador.

- Podríamos creer que la siguiente fracción algebraica sí es un polinomio:

$$\frac{-3x^3+5x^2-3x}{x}=\frac{-3x^3}{x}+\frac{5x^2}{x}+\frac{-3x}{x}=-3x^2+5x-3$$

La expresión de la derecha sí es un polinomio, pues se trata de una suma de monomios, pero la de la izquierda no lo es ya que no puede ser evaluada en $x=0$. No obstante, esa fracción algebraica y el polinomio, cuando son evaluados en cualquier número diferente de cero, ofrecen el mismo valor.

Son **expresiones equivalentes** allí donde ambas tienen sentido.

Simplificación de fracciones algebraicas:

De la misma manera que se hace con las fracciones numéricas, para simplificar fracciones algebraicas se descomponen numerador y denominador en factores, simplificando, posteriormente, aquellos que son comunes.

Ejemplo:

- *Una fracción algebraica como*

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

puede ser simplificada gracias a que el numerador y el denominador admiten factorizaciones en las que algún polinomio está presente en ambas.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Como ya hemos apuntado en otras ocasiones, las expresiones final e inicial no son idénticas pero sí son equivalentes en todos aquellos valores para los que ambas tienen sentido, esto es, para aquellos en los que no se anula el denominador.

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Operaciones con fracciones algebraicas

Las operaciones con fracciones algebraicas se realizan de la misma forma que las respectivas operaciones con fracciones numéricas.

Puesto que las fracciones algebraicas obtenidas a partir de dos polinomios son, en potencia, números reales, operaremos con tales expresiones siguiendo las propiedades de los números reales.

- **Suma o resta.** Para sumar o restar dos fracciones algebraicas deberemos conseguir que tengan igual denominador. Una manera segura de lograrlo, aunque puede no ser la más adecuada, es ésta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

- **Producto.** Basta multiplicar los numeradores y denominadores entre sí:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

- **División.** Sigue la conocida regla de la división de fracciones numéricas:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Ejemplo:

- En una suma de fracciones algebraicas como ésta

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podemos alcanzar un común denominador en las fracciones a partir de la descomposición de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$

$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Conviene destacar que en el resultado final se ha optado por dejar el denominador factorizado. De esa forma, entre otras cuestiones, se aprecia rápidamente para qué valores de la indeterminada esa fracción algebraica no admite ser evaluada.

Actividades propuestas

37. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$ b) $\dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$ c) $\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

38. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

39. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\dfrac{5}{-3x+12}+\dfrac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\dfrac{-x}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

40. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\dfrac{2x+1}{x^2+1}+\dfrac{4}{x}$ b) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x+1}$ c) $\dfrac{-x}{x^2+3x}\cdot\dfrac{1}{x-1}$ d) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}:\dfrac{x-2}{x+3}$

41. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, únicamente uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\dfrac{-x^2+x-1}{x^3}-\dfrac{3x+2}{x^2}$ b) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}-\dfrac{8}{x+3}$

42. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

a) $\dfrac{8a^4b^3}{2a^2b^2}=4a^2b$ b) $\dfrac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\dfrac{3}{2}y$

c) $\dfrac{3x^2-9x}{6x+12}=\dfrac{x^2-3x}{x+4}$ d) $\dfrac{6a^2b^2+8a^2b-10ab}{2ab^2+16a^2b}=\dfrac{3ab+4a-5}{b+8a}$

3. ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO:

En este apartado vamos a centrarnos en la resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grado y en su interpretación gráfica, para luego exponer los sistemas de ecuaciones e inecuaciones y su aplicación a las Ciencias y a las Ciencias Sociales.

Ya sabes que:

3.1. Resolución de ecuaciones de primer grado

Recuerda que:

La técnica para resolver una ecuación de primer grado consiste siempre en transformar la ecuación inicial en otra equivalente hasta conseguir aislar la incógnita en el primer miembro:

Ejemplo:

- Resolver la ecuación: $\frac{7(x-1)}{3}+\frac{5x}{6}=1-\frac{x}{2}$

- *Primer paso: Suprimir los denominadores.*

El m.c.m de los denominadores es 6, multiplicamos por 6 toda la ecuación.

$$\frac{6.7(x-1)}{3}+\frac{6.5x}{6}=6.1-\frac{6.x}{2} \Rightarrow 14(x-1)+5x=6-3x$$

- *Segundo paso: Efectuar los paréntesis:*

$$14x-14+5x=6-3x$$

- *Tercer paso: Trasponer términos y simplificar:*

$$14x+5x+3x=6+15 \Rightarrow 22x=20$$

- *Cuarto paso: despejar la incógnita, simplificando el resultado.*

$$x=\frac{20}{22}=\frac{10}{11}$$

- *Quinto paso: Comprobar el resultado.*

Sustituimos el resultado obtenido en la ecuación dada y comprobamos que se verifica la igualdad.

Recuerda que:

Las ecuaciones permiten resolver muchos tipos de problemas.

El tratamiento habitual ante un problema concreto es el siguiente:

1. **Plantear una ecuación que concuerde con el enunciado.**
2. **Resolver la ecuación.**
3. **Comprobar el resultado e interpretarlo**

Ejemplo:

- La suma de tres números enteros consecutivos es 108. ¿Cuáles son esos números?

Llamando x al menor. Los tres números, al ser consecutivos, serán:

1º número: x

2º número: $x+1$

3º número: $x+2$

Planteamos ahora la ecuación correspondiente al enunciado: la suma ha de ser 108. Por tanto:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 108$$

Los paréntesis, en este caso, no son necesarios debido a la propiedad asociativa de la suma de números reales. Se han puesto, exclusivamente, para aclarar la ecuación que estamos escribiendo.

Eliminamos los paréntesis y agrupamos términos nos queda:

$$x + x + 1 + x + 2 = 108 \Rightarrow x + x + x = 108 - 1 - 2 = 105 \Rightarrow 3x = 105$$

Despejando la incógnita:

$$x = \frac{105}{3} = 35.$$

Por tanto los números son 35, 36 y 37, cuya suma es 108.

3.2. Ecuaciones de segundo grado

Ya sabes que:

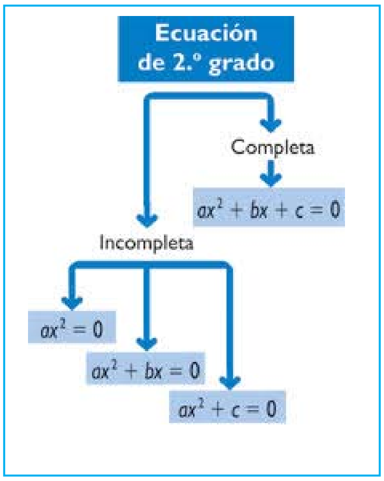
Recuerda que

Una ecuación de segundo grado es aquella que tiene como forma general la siguiente:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}, \text{ con } \boldsymbol{a \neq 0}.$$

Una ecuación tiene tantas soluciones como su grado.

Ya sabes que al ser de grado 2 tendrá 2 soluciones o 1 o ninguna en el campo real.



Según sea la ecuación de segundo grado sus soluciones se pueden hallar:

Caso 1: El coeficiente de la x es 0: b = 0:

En este caso la ecuación es de la forma: $ax^2 + c = 0$.

Para hallar las soluciones basta con despejar la x:

$$ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}; x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ejemplo:

- Resolver la ecuación: $2x^2 - 8 = 0$

Se despeja x^2:

$$2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$$

Caso 2: El término independiente es 0: $c = 0$

La ecuación es ahora de la forma:

$$ax^2 + bx = 0\,.$$

Para resolver basta con sacar factor común a la x:

$$ax + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; ax + b = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

En este caso siempre una de las dos soluciones va a ser la $x = 0$.

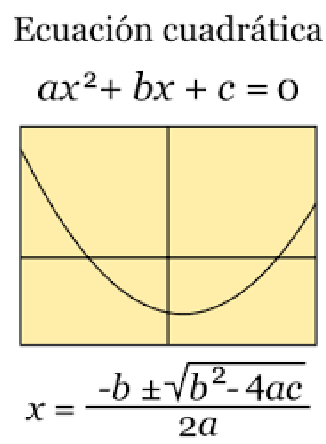
Los casos 1 y 2 son **ecuaciones de segundo grado incompletas**, que también se pueden resolver aplicando la fórmula general. Sin embargo es más rápido resolverlas de la manera que acabamos de exponer.

Caso 3: Resolución analítica de una ecuación de segundo grado completa:

Solución gráfica de una ecuación de segundo grado: Consideramos la función

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Su representación gráfica es una parábola, donde las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los puntos de corte de ésta con el eje de abscisas.



Fuente Wikipedia

Solución analítica de una ***ecuación de segundo grado completa:*** Partiendo de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ vamos a obtener el valor de x:

Pasamos el término independiente al segundo miembro quedando expresado de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx = -c$$

Multiplicamos toda la ecuación por $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumamos b^2 a ambos miembros: $$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

El primer miembro es el cuadrado del binomio $2ax + b$. Por tanto:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extraemos la raíz cuadrada:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Pasamos b al segundo miembro y dividimos por $2a$, con lo que obtenemos el siguiente resultado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por tanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es la fórmula general para calcular las dos soluciones de la ecuación de segundo grado

Particularidades:

El radicando, $b^2 - 4ac$, recibe el nombre de **discriminante** de la ecuación. Se representa por la letra griega Δ. Según sea el signo del discriminante pueden darse tres casos:

- $\Delta > 0$: La ecuación tendrá las dos soluciones x_1 y x_2
- $\Delta = 0$: La ecuación tiene una única **solución doble**, las dos soluciones de la ecuación son iguales:

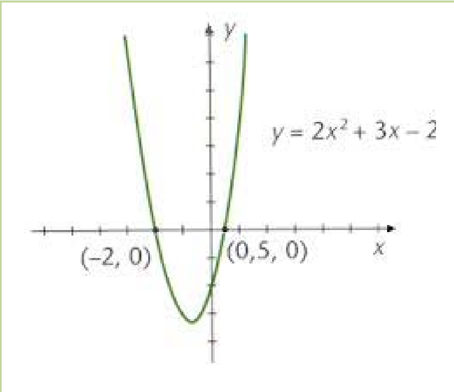
$$x = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

- $\Delta < 0$: El radicando es negativo, la ecuación no tiene raíces reales, (la raíz da lugar a un número ** complejo no real,).

Ejemplo:

- Resolver la ecuación:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$



Su solución gráfica es una parábola con el vértice hacia abajo al tener positivo el coeficiente de x^2, como hemos representado aquí.

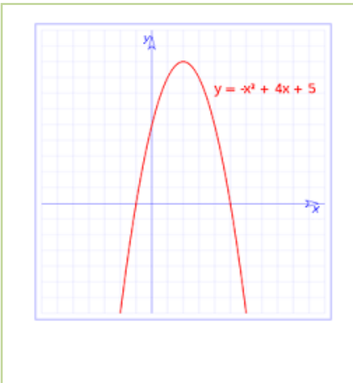
Vamos a ver que sus soluciones analíticas son los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas.

Comprobémoslo:

$2x^2 + 3x - 2 = 0$. Aplicando la fórmula general de resolución de una ecuación de segundo grado completa.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.2.(-2)}}{2.2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -2,$$

que coinciden con los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas.



Ejemplo:

- Vamos a considerar ahora un ejemplo de una ecuación de segundo grado con el coeficiente de x^2 negativo $-x^2 + 4x + 5$ cuya representación gráfica es una parábola con el vértice hacia arriba:

Como en el ejemplo anterior aplicamos la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado, la ecuación es:

$$-x^2+4x+5$$

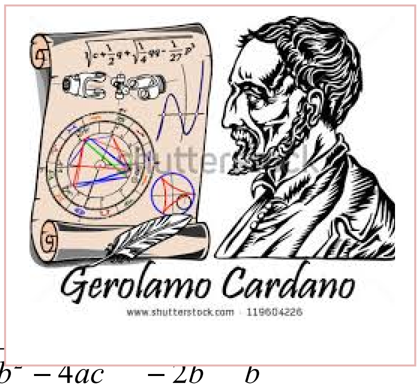
Cuya solución es:

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.(-1).5}}{2.(-1)}=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{-2}=\frac{-4\pm 6}{-2}\Rightarrow x_1=-1; x_2=5,$$

que coinciden con el corte de la párabola con el eje de abscisas.

Suma y producto de las soluciones en una ecuación de segundo grado

Vamos a calcular ahora a qué es igual la suma y el producto de las dos raíces de una ecuación de segundo grado.



Llamamos:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

a las dos soluciones o raíces.

Veamos en primer lugar, a qué es igual la suma de ambas:

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}+-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{b}{a}$$

Es decir:

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}$$

Veamos ahora el producto:

$$x_1.x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

Es decir: $x_1.x_2=\dfrac{c}{a}$

Fórmula de *Cárdano*. $x_1\cdot x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Las igualdades anteriores nos permite resolver el problema inverso al habitual: en lugar de dada una ecuación hallar sus raíces o soluciones, podremos, sabiendo cuáles son las soluciones de una ecuación, hallar la expresión de dicha ecuación.

En efecto, consideramos la ecuación de segundo grado de siempre, de soluciones x_1 y x_2:

$$ax^2+bx+c=0$$

Dividiendo toda la ecuación por el coeficiente de x^2:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Ecuación equivalente a la dada.

Fijándonos en dicha ecuación, vemos que el coeficiente de la x es igual a la suma de las dos raíces con el signo contrario, mientras que el término independiente es igual al producto de las dos raíces.

Como consecuencia: si las dos raíces de una ecuación de segundo grado son x_1 y x_2, la ecuación es:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - sx + p = 0$$

Ejemplo:

- Las dos raíces de una ecuación de segundo grado son $x_1 = 1/2$ y $x_2 = 2/3$. ¿Cuál es esa ecuación?

Sumando las dos raíces tenemos: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$. Lo llamamos s.

Multiplicamos las dos raíces y tenemos: $\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Lo llamamos p.

Por la fórmula anterior obtenemos que la ecuación es:

$$x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0.$$

Si quitamos denominadores nos queda:

$$6x^2 - 7x + 2 = 0.$$

- Otra forma de resolver este tipo de problemas es hacer uso de la factorización de polinomios que se estudió en páginas anteriores.

Consideramos la ecuación de segundo grado completa $ax^2 + bx + c = 0$ de soluciones x_1 y x_2.

Sabemos que esta primera ecuación es equivalente a esta otra: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

En consecuencia, el polinomio correspondiente a la misma es:

$$p(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

Tiene como raíces los números x_1 y x_2 y su descomposición factorial es:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

Si efectuamos el producto, podemos escribir la ecuación correspondiente:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Se pueden plantear múltiples problemas de la vida real y de aplicación a otras ciencias.

Las pautas a seguir son iguales que las de las ecuaciones de primer grado.

Veamos un ejemplo:

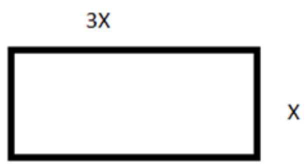
Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo

Ejemplo:

- Queremos sembrar de césped una parcela rectangular de 27 m^2, de manera que uno de los lados de la misma sea el triple que el otro. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

Llamando x al lado más pequeño del rectángulo, el otro, al ser triple, medirá $3x$.

Puesto que el área del rectángulo es igual al producto de la base por la altura:



$$3x.x = 27 \Rightarrow 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9$$

Por tanto las dos soluciones de esta ecuación son x = 3 y x = –3.

Pero puesto que no tienen sentido que una longitud sea negativa para una parcela, la única solución válida para es x = 3 m. Según esto las dimensiones de la parcela son 3 m y 9 m.

Ecuaciones bicuadradas:

Se llaman ecuaciones **bicuadradas** a las ecuaciones del tipo siguiente:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Son ecuaciones de cuarto grado, en las cuales la incógnita aparece únicamente elevada a potencias pares. Al ser de cuarto grado, tendrá 4 soluciones.

El proceso general para resolver este tipo de ecuaciones es hacer un cambio de variable.

Haciendo $t=x^2$ tendremos la expresión siguiente:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow at^2 + bt + c = 0$$

Conseguimos convertir la ecuación de cuarto grado en una ecuación de segundo grado fácil de resolver, de ahí que lo haya incluido como una ecuación de segundo grado particular.

Se resuelve la ecuación de segundo grado como tal y una vez resuelta debemos realizar el último paso:

Hemos hallado el valor de t, pero la incógnita es x. Con lo cual hemos de deshacer el cambio efectuado:

Si $x^2 = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$

Ejemplo:

- Resolver la ecuación $3x^4 + x^2 - 4 = 0$

Efectuando el cambio $x^2 = t$, la ecuación se convierte en :

$$3t^2 + t - 4 = 0$$

Que resolvemos para t:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.3.(-4)}}{2.3} = \frac{-1 \pm 7}{6} \Rightarrow t_1 = 1; t_2 = -\frac{4}{3}$$

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Es decir, las dos soluciones de esta ecuación son $t_1 = 1$ y $t_2 = -4/3$, deshacemos el cambio:

$$x^2 = t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 = t = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

**(Esta última solución no es un número real, pues una raíz cuadrada negativa no tiene solución real. Se encuentra dentro de los números imaginarios que corresponde a un tema posterior.

En definitiva, las cuatro soluciones de la ecuación bicuadrada inicial son:

$$x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}i; x_4 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

Actividades propuestas

43. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{2x-4}{3x-2} = \dfrac{4}{7}$

b) $\dfrac{x+8}{x-1} - \dfrac{x+4}{x+1} = \dfrac{12x}{x^2-1}$

c) $\dfrac{3(2x+1)}{4} - \dfrac{5x+3}{6} + 4x + \dfrac{x+1}{3} = x + \dfrac{151}{12}$

44. Resolver:

a. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(x+3)^2}{9} = 1$

b. $\dfrac{x^2}{16} = 1 + \dfrac{3/4x}{9}$

c. $4x^4 + 8x^2 - 12 = 0$

d. $80x^4 - 48x^2 - 12 = 0$

45. Sumando siete unidades al doble de un número más los 3/2 del mismo obtenemos como resultado el séxtuplo de dicho número menos 23.¿De que número se trata?

46. Las dimensiones de un rectángulo son 54 y 36 metro. Trazar una paralela al lado que mide 36 m de modo que se forme un rectángulo semejante al primero. ¿Cuáles son las longitudes de los segmentos en que dicha paralela divide al lado de 54 m?

47. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300000€.Si la finca vale 4 veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca .¿Cuánto vale cada cosa?

3.3. Resolución de inecuaciones de primer grado y su interpretación gráfica

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas.

El **grado** de una inecuación es el mayor de los grados al que están elevadas sus incógnitas.

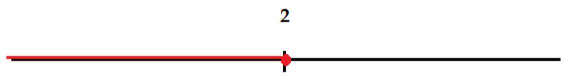
Así,

- $4 \geq x + 2$ y $x + y \geq 2$ son inecuaciones de primer grado, mientras que $x^2 - 5 \geq x$ es de segundo grado.

Resolver una inecuación consiste en encontrar los valores que la verifican. Éstos se denominan **soluciones** de la misma.

Por ejemplo:

- $4 \geq x + 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \quad \Leftrightarrow$



Inecuaciones equivalentes

Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

A veces, para resolver una inecuación, resulta conveniente encontrar otra equivalente más sencilla. Para ello, se pueden realizar las siguientes transformaciones:

- Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la inecuación.

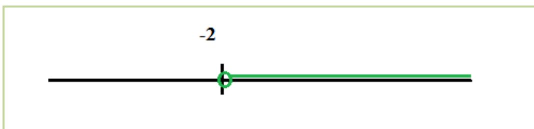
$$5x + 4 < 9 \Leftrightarrow 5x + 4 - 4 < 9 - 4 \Leftrightarrow 5x < 5$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número positivo.

$$5x < 5 \Leftrightarrow 5x : 5 < 5 : 5 \Leftrightarrow x < 1$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad.

$x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2 \;\Leftrightarrow (-2, +\infty) \Leftrightarrow$



Inecuaciones de primer grado con una incógnita:

Una inecuación de primer grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b \quad \text{o bien} \quad ax \leq b.$$

Para resolver la inecuación en la mayoría de los casos conviene seguir el siguiente procedimiento:

1º) **Quitar denominadores**, si los hay. Para ello, se multiplica los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.

2º) **Quitar los paréntesis**, si los hay.

3º) **Transponer** los términos con x a un miembro y los números al otro.

4º) **Reducir** términos semejantes.

5º) **Despejar** la x.

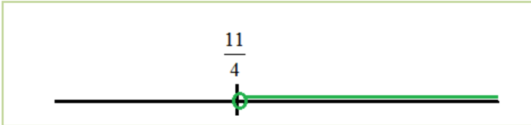
Ejemplo:

$$\frac{x-5}{3}-\frac{(x-8)}{6}>\frac{3-x}{2} \Leftrightarrow \frac{2(x-5)-(x-8)}{6}>\frac{3(3-x)}{6} \Leftrightarrow 2(x-5)-(x-8)>3(3-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x-10-x+8>9-3x \Leftrightarrow 2x-x+3x>10-8+9 \Leftrightarrow$$

$$4x>11 \Leftrightarrow x>\frac{11}{4}$$

$$x \in \left(\frac{11}{4},+\infty\right)$$



Actividades propuestas

48. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $5 + 3x < 2x + 4$ b) $3 + 4x \leq 8x + 6$ c) $5 + 4x > 3x + 2$ d) $1 + 3x \geq 5x + 7$

49. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $4(3 + 2x) < -(6x + 8)$ b) $7(2 + 3x) \leq 5(6x + 3)$ c) $9(2 + 4x) + 4(5x - 2) > 3(2x + 1)$

50. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $6 + 3x < x/3 + 1$ b) $5 + 5x/2 \leq 9x/2 + 1$ c) $(2 + 5x)/3 > 4x + 1$ d) $(1 + 5x)/2 + 1 \geq (3x + 6)/4$

51. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $[2, \infty)$ b) $(-\infty, 3)$ c) $(4, \infty]$ d) $(-\infty, 2)$

52. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x-3}$ b) $\sqrt{-x-9}$ c) $\sqrt{2-7x}$ d) $\sqrt{-2x+7}$

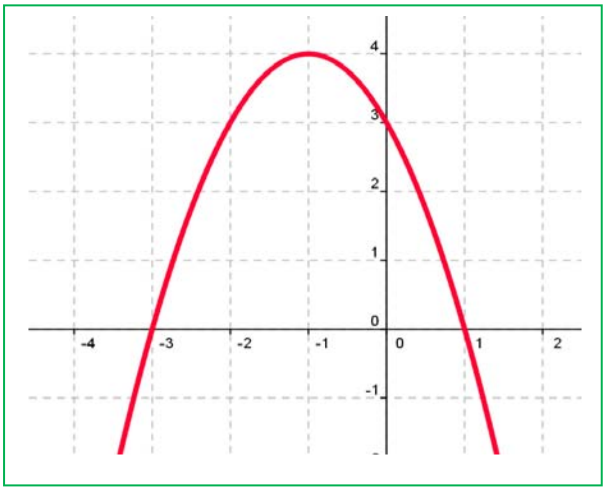
3.4. Resolución de inecuaciones lineales de segundo grado

Una inecuación de segundo grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

empleando cualquiera de los cuatro signos de desigualdad.

Para resolverla, calculamos las soluciones de la ecuación asociada, las representamos sobre la recta real, quedando por tanto la recta dividida en tres, dos o un intervalo, dependiendo de que la ecuación tenga dos, una o ninguna solución.



En cada uno de ellos, el signo del polinomio se mantiene constante, por lo que bastará con determinar el signo que tiene dicho polinomio para un valor cualquiera de cada uno de los intervalos. Para saber si las soluciones de la ecuación verifican la inecuación, bastará con sustituirla en la misma y comprobarlo.

Ejemplo:

- *Representa gráficamente la parábola*

$$y = x^2 + 4x + 6$$

e indica en qué intervalos es $x^2 + 4x + 6 > 0$.

Observa en la gráfica que la parábola toma valores positivos entre –3 y 1. La solución de la inecuación es:

$$x \in (-3, 1).$$

El punto –3 no es solución, ni tampoco el punto 1, pues el problema tiene una desigualdad estricta, >. Si tuviera la desigualdad $\geq$, $x^2 + 4x + 6 \geq 0$, la solución sería:

$$x \in [-3, 1\}.$$

Si fuera $x^2 + 4x + 6 < 0$, la solución sería: $x \in (-\infty,-3) \cup (1, +\infty)$.

Si fuera $x^2 + 4x + 6 \leq 0$, la solución sería: $x \in (-\infty,-3] \cup [1, +\infty)$.

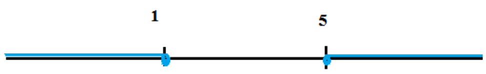
Ejemplo:

- $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

Las raíces de $x^2 - 6x + 5 = 0$ son $x = 1$ y $x = 5$.

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5, +\infty)$
Signo de $x^2 - 6x + 5$	+		–		+
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$	si		no		si

Por tanto, la solución es $x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$



Actividades propuestas

53. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$
e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$

54. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$
d) $x^2 \leq 3x$ e) $2x^2 - 3x > 0$ f) $5x^2 - 10x < 0$

55. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$

c) $x^2 + 9x + 14 > 0$

d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$

f) $x^2 + 8x + 16 > 0$

g) $x^2 + x + 3 \geq 0$

h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$

56. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x - 6 > 0$

b) $x^2 - x - 12 \leq 0$

c) $x^2 - \mathrm{x} - 20 < 0$

d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$

e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$

f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$

g) $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$

h) $2x^2 + x - 15 < 0$

57. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

58. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50$ c) $\dfrac{3x-2}{x} \leq \dfrac{5-2x}{x+3}$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES :

Los sistemas de ecuaciones lineales son ecuaciones en las que todas sus incógnitas están elevadas a la unidad, no pudiendo aparecer el producto de dos de ellas.

Es un conjunto de ecuaciones que debe verificarse para los mismos valores de las incógnitas, llamadas **soluciones.**

Resolver un sistema es encontrar los valores que, sustituidos en las incógnitas, cumplan todas las ecuaciones a la vez

Se clasifican atendiendo a criterios diversos: número de ecuaciones o de incógnitas, tipo de las soluciones…

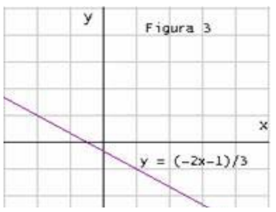
Los sistemas de ecuaciones lineales atendiendo, al tipo de de solución, se clasifican en, los que tienen solución se llaman *compatibles* y los que no, *incompatible*. Los compatibles pueden ser

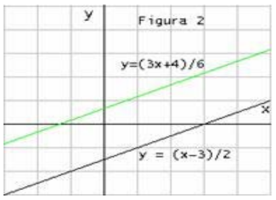
- **Compatible determinado:** si posee una solución
- **Compatible indeterminado:** si posee más de una solución (poseen infinitas)

Sistemas de ecuaciones y posiciones de sus rectas en el plano:

Sistema Compatible
- Determinado
  - Solución única
  - Rectas secantes
- Indeterminado
  - Infinitas soluciones
  - Rectas coincidentes

Sistema Incompatible
- No tiene solución
- Rectas paralelas





Vamos a repasar los tres métodos elementales de resolución de sistemas lineales con dos ecuaciones y con dos incógnitas que son:

Ejemplo

- Resolveremos el siguiente sistema:

$5x - y = 3$

$2x + 3y = 8$

- ***Método de sustitución:***

El proceso consiste en despejar una cualquiera de las incógnitas de una cualquiera de las ecuaciones y sustituir en la otra.

Despejamos por ejemplo, la y de la primera ecuación:

$$\boldsymbol{y = 5x - 3}$$

Y sustituimos en la segunda:

$$2x + 3\,(5x - 3) = 8 \;\Rightarrow x = 1$$

Y, por tanto $y = 2$

♦ ***Método de Igualación:***

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones, igualando posteriormente ambas expresiones.

Despejamos, por ejemplo, la y en ambas ecuaciones:

$$\boldsymbol{5x - y = 3}$$

$$2x + 3y = 8 \Rightarrow y = 5x - 3$$

$$y = \frac{8 - 2x}{3}$$

Igualando:

$$5x - 3 = \frac{8 - 2x}{3} \Rightarrow x = 1$$

Posteriormente, para hallar $\boldsymbol{y}$ se sustituye el valor encontrado de x en una cualquiera de las dos ecuaciones iniciales, y se calcula el correspondiente valor *de* $\boldsymbol{y}$.

♦ ***Método de reducción:***

Este método consiste en transformar alguna de las ecuaciones en otras equivalentes de manera que al sumarlas o restarlas se eliminen una de las incógnitas.

Multiplicando la primera ecuación por 3, obtenemos el sistema equivalente al siguiente:

$$\boldsymbol{5x - y = 3} \qquad \boldsymbol{15x - 3y = 9} \Rightarrow 17x = 17 \quad \Rightarrow x = 1$$

$$2x + 3y = 8 \quad \Rightarrow \quad 2(1) + 3y = 8$$

Gráficamente las ecuaciones con dos incógnitas representan en el plano una recta.

En el caso anterior, la ecuación: $y = 5x - 3$ y la ecuación: $y = \dfrac{8 - 2x}{3}$ son dos rectas en el plano.

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

Resolver analítica y graficamente el sistema de ecuaciones : $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

Dos rectas son secantes si sólo tienen un punto en común. Al resolver el sistema que forman sus ecuaciones obtenemos una solución que se corresponde con las coordenadas del punto de corte.

Analítica

Resolvemos el sistema por reducción.

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a(2) \end{matrix} \begin{cases} 3x+2y=7 \\ 4x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 7x=7 \\ x=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3\cdot 1+2y=7 \\ y=2 \end{matrix} \qquad \text{Sol}:(1,\ 2)$$

Graficamente

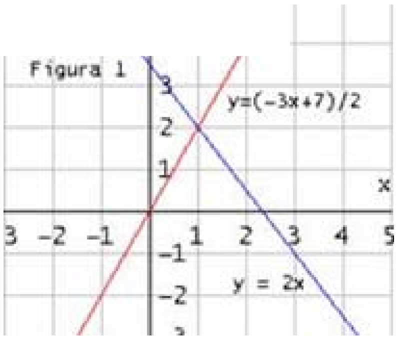
Hacemos la tabla de valores de cada una de las ecuaciones.
Representamos las dos rectas que forman el sistema de ecuaciones.

$1^a \quad 3x+2y=7 \rightarrow y=\dfrac{-3x+7}{2} \rightarrow$

x	0	1
y	3,5	2

$2^a \quad y=2x \rightarrow$

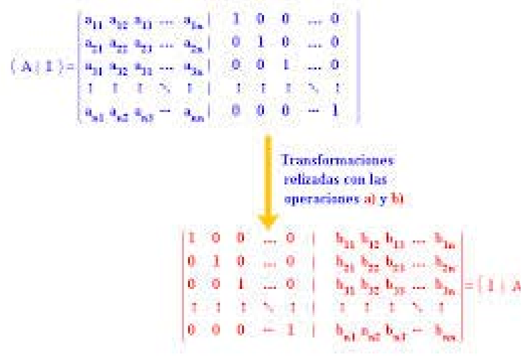
x	0	1
y	0	2



4.1. Resolución por el método de Gauss:

GAUSS: Fuente Google

El método de *Gauss* está basado en el método de reducción también llamado de cascada o triangulación.



La ventaja que tiene este método es que es fácilmente generalizable a sistemas con cualquier número de ecuaciones y de incógnitas.

Este método consiste en obtener, para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, un sistema equivalente cuya primera ecuación tenga tres incógnitas; la segunda, dos; y la tercera una. Se obtiene así un sistema triangular de la forma siguiente:

Recuerda que:

Un sistema equivalente a otro cuando ambos tienen las mismas soluciones.

Son sistemas cuyas ecuaciones son complicadas, en su lugar resolvemos otro sistema que tenga las mismas soluciones que el propuesto (sistema equivalente) y que sea de ecuaciones mucho más sencilla

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ 0 + B'y + C'z = D' \\ 0 + 0 + C''z = D'' \end{cases}$$

La resolución del sistema es inmediata; en la tercera ecuación calculamos sin dificultad el valor de z, llevamos este valor de z a la segunda ecuación y obtenemos el valor de y, y con ambos valores calculamos el valor de x en la primera ecuación.

Ejemplo:

- Resuelve, aplicando el método de Gauss, el sistema:

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= -1 \\ 2x - 3y - 2z &= 1 \\ -x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

El proceso es el siguiente:

1. Se elimina la incógnita x en las ecuaciones segunda y tercera, sumando a éstas, la primera ecuación multiplicada por 2 y 1, respectivamente, quedando el sistema:

$$x + 4y + 3z = -1$$

$E2 - 2E1 \qquad 0 - 11y - 8z = 3$
$E3 + E1 \qquad 0 + 6y + 7z = 1$

2. Suprimimos la incógnita y de la tercera ecuación sumando a la misma, previamente multiplicada por 11, la segunda multiplicada por 6:

$$x + 4y + 3z = -1$$
$$0 - 11y - 8z = 3$$
$$11E3 + 6E2 \qquad 0 + 0 + 29z = 29$$

3. Se resuelve el sistema escalonado empezando por la tercera ecuación:

$$29z = 29 \Rightarrow z = \frac{29}{29} \Rightarrow z = 1$$

Ahora, en la segunda ecuación:

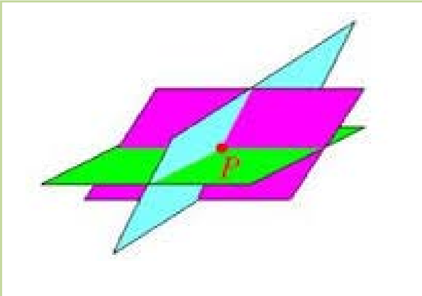
$$-11y - 8\,(1) = 3 \Leftrightarrow -11y = -11 \Leftrightarrow y = -1$$

Y, por último, en la primera:

$$x + 4\,(-1) + 3.1 = -1 \Leftrightarrow x = -1 + 1 = 0$$

La solución del sistema es:

$$x = 0,\ y = -1,\ z = 1$$



Geométricamente como cada ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano, podemos decir que los tres planos se cortan en el punto (0, –1, 1) que es el único punto común a los tres.

Es un sistema **compatible determinado.**

4.2. Discusión de sistemas aplicando el método de Gauss:

Discutir un sistema consiste en explicar razonadamente sus posibilidades de solución dependiendo del valor de sus coeficientes y términos independientes. En los sistemas escalonados la discusión se hace a partir de la ecuación más simple, que supondremos que es la última. Así, estudiando la tercera ecuación del sistema [2], *a''*33*z* 5 *b''*3, se determinan las posibilidades de solución del sistema inicial, verificándose:

Partimos del sistema inicial

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \qquad \text{(E1)}$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \qquad \text{(E2)}$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \qquad \text{(E3)}$$

que transformamos en otro equivalente a él, de la forma:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \qquad \text{(E1)}$$
$$0 + a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \qquad \text{(E'2)}$$

$$0 \;\; + 0 + a_{33}''z = b''_3 \qquad \text{(E''3)}$$

Para ello se elimina la incógnita x de la ecuación segunda (E2) y (E3) y las incógnitas x e y de la tercera ecuación (E3).

Así, estudiando la tercera ecuación del sistema propuesto, $a_{33}''z = b''_3$, se determinan las posibilidades de solución del sistema inicial, verificándose:

- Si $a_{33}'' \neq 0$ el sistema es **compatible determinado**, pues siempre se puede encontrar una solución única empezando a resolver el sistema por la tercera ecuación.
- Si a_{33}'' = 0 y b''_3 = 0 el sistema es **compatible indeterminado**, pues la ecuación E3 desaparece (queda 0z = 0, que se cumple para cualquier valor de z resultando así un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas), el sistema anterior queda:

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x + a_{12}\,y + a_{13}z = b_1 & & a_{11}x + a_{12}\,y + a_{13}z = b_1 & & a_{11}x + a_{12}\,y = b_1 - a_{13}z \\ a'_{22}\,y + a'_{23}z = b'_2 & \Leftrightarrow & a'_{22}\,y + a'_{23}z = b'_2 & \Leftrightarrow & a'_{22}\,y = b'_2 - a'_{23}z \\ 0z = 0 & & & & \end{array}$$

Para resolver este sistema hemos de suponer la incógnita z conocida y hallar las otras en función de ella. (En la práctica, suele hacerse $z = k$.)

- Si Si a_{33}'' = 0 y $b''_3 \neq 0$ el sistema es **incompatible**, pues la ecuación E3 queda 0z = $b''_3 \neq 0$, que evidentemente es absurda, pues cualquier valor de z multiplicado por 0 debe dar 0.

Ejemplo:

- Discute y halla la solución del sistema:

$$\begin{array}{c} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 3y - z = -2 \\ 2x - y + 4z = 6 \end{array}$$

Utilizando el método de Gauss se tiene:

$$\begin{array}{lcccccl} x + 2y + 3z = 4 & & & & x + 2y + 3z = 4 & & x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 3y - z = -2 & \Leftrightarrow & E2 + E1 & \Leftrightarrow & 5y + 2z = 2 & \Leftrightarrow & 5y + 2z = 2 \\ 2x - y + 4z = 6 & & E3 - 2E1 & & -5y - 2z = -2 & E3 + E2 & 0z = 0 \end{array}$$

Como la ecuación E3 se ha anulado el sistema es **compatible Indeterminado**, ya que tiene menos ecuaciones que incógnitas, tendrá infinitas soluciones, pudiendo expresarlas todas en función de una de ellas.

Este sistema es equivalente a:

$$\begin{array}{lcl} x + 2y + 3z = 4 & & x + 2y = 4 - 3z \\ 5y + 2z = 2 & \Leftrightarrow & 5y = 2 - 2z \end{array}$$

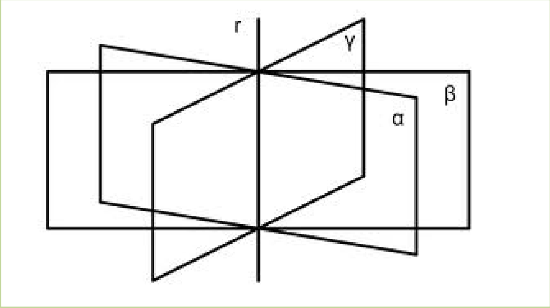
Despejando y en E2, resulta $y = \dfrac{2-2z}{5}$. Sustituyendo en E1:

$$x + 2.\left(\frac{2-2z}{5}\right) = 4 - 3z \Leftrightarrow x = 4 - \frac{4-4z}{5} - 3z \Leftrightarrow x = \frac{16-11z}{5}$$

Haciendo $z = k$, la solución es:

$$x = \frac{16-11k}{5};\ y = \frac{2-2k}{5};\ z = k$$

Geométricamente, las ecuaciones del sistema anterior representan a tres planos con infinitos puntos comunes alineados según una recta.



Actividades resueltas:

- Resolver por el método de *Gauss* el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-y+3z=1 \\ 3x+y+4z=5 \end{cases}$$

Eliminamos x en la 2ª y 3ª ecuaciones. Para ello hacemos: E2 – 2E1 y E3 - 3E1

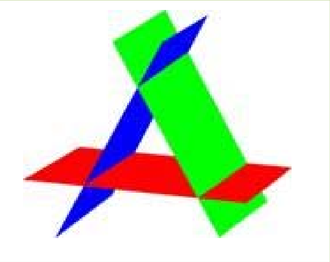
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \\ -5y+z=-5 \\ -5y+z=-4 \end{cases}$$

Eliminamos y en la 3ª ecuación, para ello hacemos: E3 - E2:

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -5y+z=-5 \\ 0=1 \end{cases}$$

La última ecuación $0 = 1$ es un absurdo que nos dice que el sistema es **incompatible, sin solución**.

Geométricamente, los planos que representan a las ecuaciones no tienen ningún punto en común.



- Resuelve, aplicando el método de Gauss, el sistema:

$$\begin{cases} x+4y+3z=-1 \\ 2x-3y-2z=1 \\ 2x+2y+4z=2 \end{cases}$$

El proceso es el siguiente:
1. Se elimina la incógnita x en las ecuaciones segunda y tercera, sumando a éstas, la primera ecuación multiplicada por -2 y 1, respectivamente: *E*2 - 2*E*1; *E*3 + *E*1, quedando el sistema:

$$\begin{cases} x+4y+3z=-1 \\ 0-11y-8z=3 \\ 0+6y+7z=1 \end{cases}$$

2. Suprimimos la incógnita y de la tercera ecuación sumando a la misma, previamente multiplicada por 11, la segunda multiplicada por 6: 11E3 + 6E2.

$$\begin{cases} x+4y+3z=-1 \\ 0-11y-8z=3 \\ 0+0+29z=29 \end{cases}$$

3. Se resuelve el sistema escalonado empezando por la tercera ecuación:

$$29z = 29 \Rightarrow z = 1.$$

Ahora, en la segunda ecuación:

$$-11y - 8\ .\ 1 = 3 \Leftrightarrow -11y = 11 \Leftrightarrow y = -1$$

Y por último, en la primera:

$$x + 4\ .\ (-1) + 3\ (1) = -1 \Leftrightarrow x = -1 + 1 = 0.$$

La solución del sistema es:

$$x = 0,\ y = -1,\ z = 1.$$

Actividades propuestas

59. Resolver por el método de *Gauss* los sistemas:

$$\text{a)} \begin{cases} 4x+2y-z=5 \\ 5x-3y+z=3 \\ 2x-y+z=3 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x+y+z=0 \\ 7x+2y-z=0 \\ 3x+5y+4z=0 \end{cases}$$

60. Resuelve y discute si es posible el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-2z=2 \\ x-y-z=1 \end{cases}$$

61. Discutir y resolver cuando sea posible, los siguientes sistemas lineales de ecuaciones.

$$\text{a)} \begin{cases} x-6y-4z=-7 \\ x+8y+4z=6 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x+y-6z-4t=6 \\ 3x+2y-3z+8t=-7 \\ 3x-y-6z-4t=2 \\ 4x-y+3z+12t=0 \end{cases}$$

4.3. Problemas de ecuaciones lineales.

Se pueden plantear problemas de la vida diaria que se pueden resolver aplicando el método de *Gauss*, ya que dan lugar a sistemas de más de dos ecuaciones e incógnitas.

Antes de resolver un problema vamos a dar unos consejos que vendrán bien para su pronta y eficaz resolución.

Recuerda que:

En la resolución del problema no importa tanto llegar a obtener la solución del problema como el **proceso** seguido en el mismo, que es el que realmente nos ayuda a potenciar nuestra forma de pensar. Para empezar debemos familiarizarnos con el problema, comprendiendo el enunciado y adquiriendo una idea clara de los datos que intervienen en éste, las relaciones entre ellos y lo que se pide.

En la fase de familiarización con el problema se deben tener en cuenta las pautas siguientes:

Antes de hacer trata de entender

Tómate el tiempo necesario.

Actúa sin prisa y con tranquilidad

Imagínate los elementos del problema y juega con ellos

Pon en claro la situación de partida, la intermedia y a la que debes llegar.

Buscar estrategias para resolver el problema y una vez encontrada llevarla adelante.

Revisar el proceso y sacar consecuencias de él: El resultado que hemos obtenido, hacemos la comprobación y observamos que verifica las condiciones impuestas por el problema.

Ejemplo:

- Averigua cuántos hombres, mujeres y niños hay en una reunión sabiendo que: Si hubiera un niño más, habría igual número de niños que de hombres y mujeres juntos. Si hubiese 8 mujeres más, el número de éstas doblaría a la suma de hombres y niños. El triple de la cantidad de hombres más el número de mujeres es igual al número de niños más 5.

Si llamamos x al número de hombres, al de mujeres y y al de niños z, obtendremos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} z+1=x+y \\ y+8=2(x+z) \\ 3x+y=z+5 \end{cases}$$

Pasamos las incógnitas al 1º miembro y obtenemos el siguiente sistema:

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+2z=8 \\ 3x+y-z=5 \end{cases}$$

Vamos a resolverlo aplicando el método de *Gauss*:

Eliminamos x en la 2ª y 3ª ecuación. Para ello hacemos E2-2E1; E3-3E1

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 0-3y+4z=6 \\ 0-2y+2z=2 \end{cases}$$

La 3ª ecuación es simplificable, la dividimos por 2, quedando E3/2:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -3y+4z=6 \\ -y+z=1 \end{cases}$$

Eliminamos y en la 3ª ecuación. Para ello hacemos -3E3+E2:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -3y+4z=6 \\ z=3 \end{cases}$$

Obtenemos así un sistema en forma escalonada muy sencillo de resolver. De la 3ª ecuación obtenemos el valor de z: $z = 3$. Sustituyendo $z = 3$ en la 2ª ecuación:

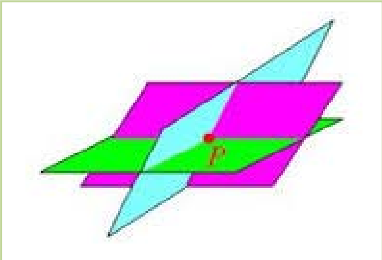
$$-3y + 4(3) = 6 \Rightarrow -3y = -6 \Rightarrow y = 2$$

Sustituyendo los valores de y y de z obtenidos en la 1ª ecuación:

$$x + 2 - 3 = 1 \Rightarrow x = 2$$

Es un sistema **compatible determinado** con solución única:

x =2 hombres, y = 2 mujeres, z= 3 niños.



Comprobamos el resultado. En efecto un niño más, 4, es igual al número de mujeres más hombres, 2 + 2. 8 mujeres más, 10, dobla al número de hombres y niños: 2(2 + 3). El triple de la cantidad de hombres, 6, más el número de mujeres, 6 + 2 = 8, es igual al número de niños más 5, 3 + 5.

Geométricamente son tres planos que se cortan en el punto (2, 2, 3) que es el único punto común a los tres.

Actividades propuestas

62. Compramos 8 kg de café natural y 5 kg de café torrefacto, pagando 66 €. Calcula el precio del kilo de cada tipo de café, sabiendo que si mezclamos mitad y mitad resulta el kilo a 5 €.

63. Una madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos. La edad del hijo menor es la mitad de la de su hermano.la suma de las edades de los niños y la de la madre es 45 años. ¿Qué edades tienen?

64. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300000 €. Si la finca vale cuatro veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca, ¿cuánto vale cada cosa?

65. Las tres cifras de un número suman 18.Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene 594; la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos. Halla dicho número.

4.4. Sistemas de inecuaciones lineales:

Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto de dos o más inecuaciones, que debe satisfacerse a la vez.

Para su resolución, se procede de la manera siguiente:

- Se resuelve cada inecuación por separado.
- **El conjunto solución** del sistema, también llamado **región factible**, está formada por las soluciones comunes a todas las inecuaciones.

Ejemplo:

- Tomemos como ejemplo el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

1º Representamos la región solución de la primera inecuación.

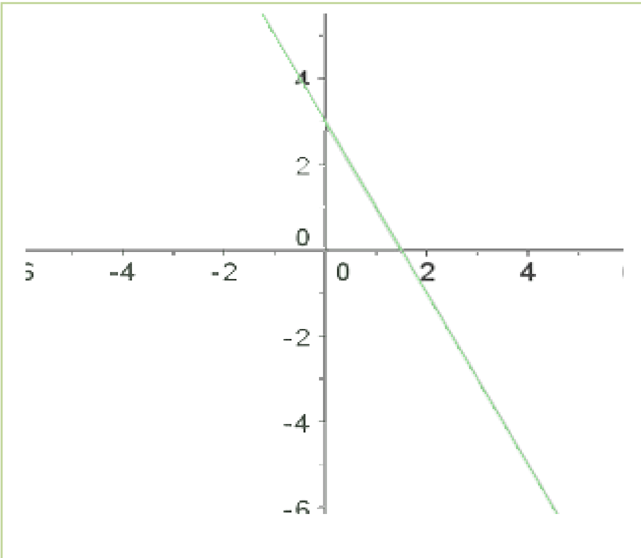
Transformamos la desigualdad en igualdad.

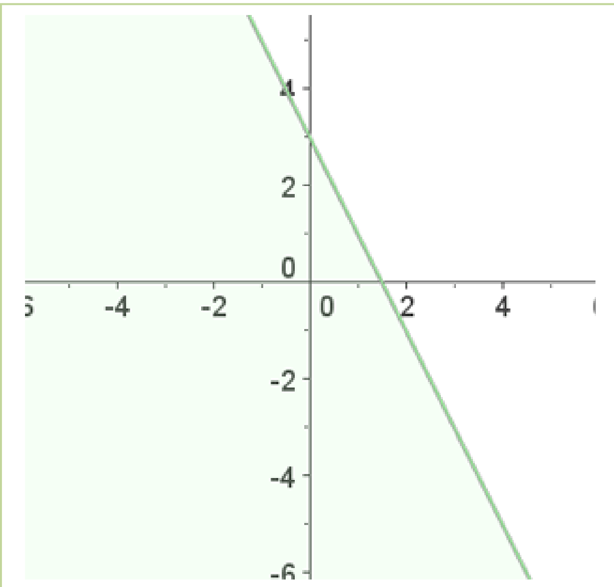
$$2x + y = 3$$

Damos a una de las dos variables dos valores, con lo que obtenemos dos puntos.

$x = 0; \quad 2 \cdot 0 + y = 3; \quad y = 3; \qquad (0,\ 3)$

$x = 1; \quad 2 \cdot 1 + y = 3; \quad y = 1; \qquad (1,\ 1)$





Al representar y unir estos puntos obtenemos una recta.

Tomamos un punto, por ejemplo el (0, 0), los sustituimos en la desigualdad. Si se cumple, la solución es el semiplano donde se encuentra el punto, si no la solución será el otro semiplano.

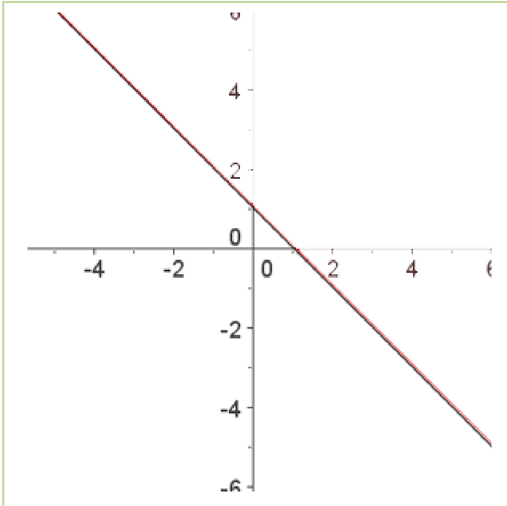
Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo

$2x + y \leq 3$

$2 \cdot 0 + 0 \leq 3 \qquad 0 \leq 3$ **Sí**

El semiplano que está sombreado es la solución de la primera inecuación.

Hacemos lo mismo con la segunda inecuación:



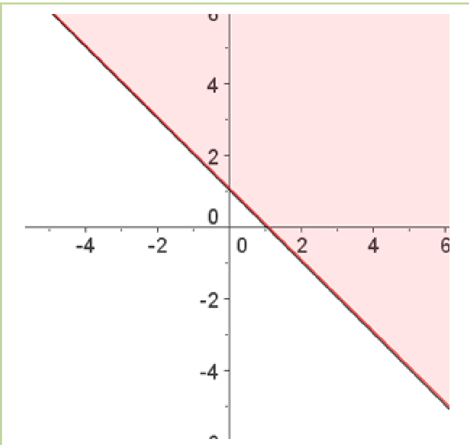
2º Representamos la región solución de la segunda inecuación.

$x + y = 1$

$x = 0; \qquad 0 + y = 1; \quad y = 1; \qquad (0,\ 1)$

$x = 1; \qquad 1 + y = 1; \quad y = 0; \qquad (1,\ 0)$

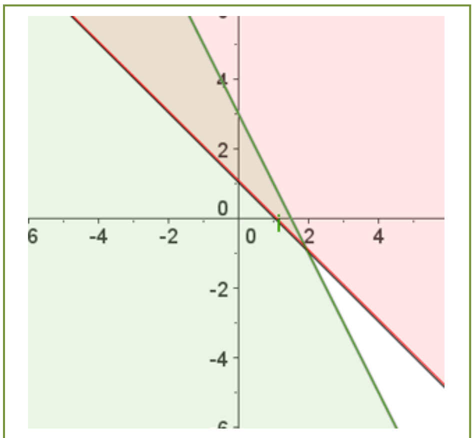
Tomamos un punto, el (0, 0) por ejemplo y lo sustituimos en la inecuación, como no se cumple la desigualdad será el semiplano en el que no está el punto.



$x + y \geq 1$

$0 + 0 \geq 1$ **No**

3º La solución es la intersección de las regiones soluciones.



Actividades resueltas:

- Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y \geq -3 \\ x + y < 2 \end{cases}$$

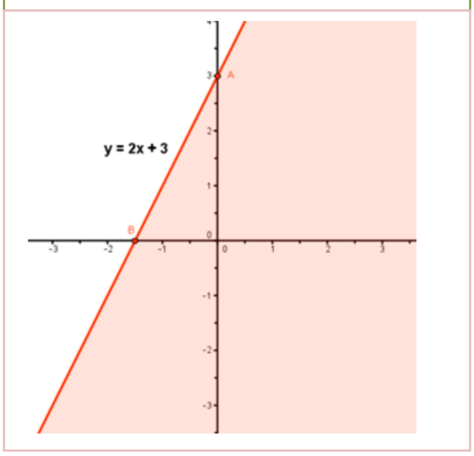
Conjunto de soluciones de la primera inecuación:

$2x - y = -3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x + 3.$

Puntos de corte de la recta con los ejes:

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad A = (0, 3)$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad x = -3/2 \quad \Rightarrow \quad B = (-3/2, 0)$



Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

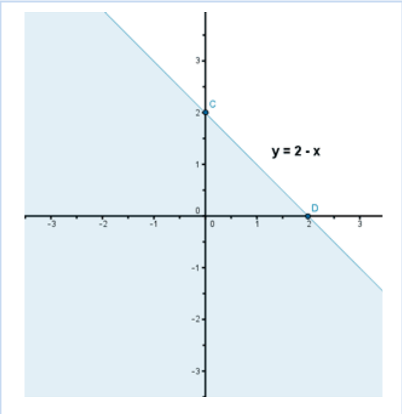
Probamos con puntos a ambos lados de la recta para ver cuál cumple la inecuación:

$$(0,\,0),\qquad 2x - y \geq -3 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \geq -3 \qquad \text{SI}$$

Como se cumple la igualdad para el punto propuesto la región factible es el semiplano al que pertenece el punto referido.

Conjunto de soluciones de la segunda inecuación:

$$x + y = 2 \qquad y = 2 - x$$



Puntos de corte de la recta con los ejes:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - x = 2 \quad \Rightarrow \quad C = (0,\,2)$$

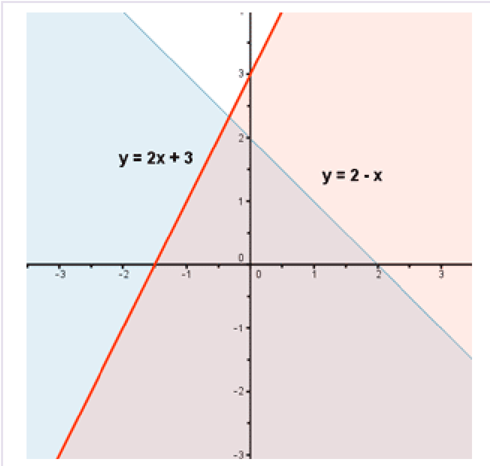
$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 - x \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad D = (2,\,0)$$

Probamos con puntos a ambos lados de la recta para ver qué región verifica la inecuación:

$$(0,\,0),\qquad x + y < 2 \qquad \Rightarrow \qquad 0 < 2$$

Como se cumple para el punto dado el semiplano elegido es en el que está el punto.

El conjunto de soluciones del sistema, o región factible, está formado por aquellos puntos que cumplan ambas inecuaciones, por tanto, la solución es la intersección de ambos semiplanos:



Actividades propuestas

66. Encuentra la región factible del sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 5y \leq 30 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

67. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x - 2y + 3}{3} \geq \dfrac{x - y + 1}{2} \\ 1 - \dfrac{2x - 4 - y}{3} + \dfrac{2x + 3y}{2} \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x+1)\cdot 10 + x \leq 6(2x+1) \\ 4(x-10) < -6(2-x) - 6x \end{cases}$

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. PROBLEMAS DE MATEMÁTICA FINANCIERA.

Vamos a plantear y a resolver problemas de matemática financiera en los que intervienen el interés simple y compuesto, y se utilizan tasas, margen de beneficio, amortizaciones, capitalizaciones y números índice. Parámetros económicos y sociales.

Pondremos un ejemplo de cada uno y lo resolveremos exponiendo las fórmulas y conceptos que hacen falta para ello.

Vamos allá:

Empezaremos por las tasas y los números índice entre los que destacaremos la tasa de natalidad y mortalidad y los índices de las bolsas y el de precios al consumo (I.P.C.) respectivamente, para después continuar con intereses y préstamos bancarios y sus amortizaciones.

5.1. Tasas

La tasa de natalidad es un indicador social. En toda tasa se da la cantidad que interesa en relación a una cantidad de referencia.

Ejemplos:

- Tasa de natalidad: 21,64 0/00 ⇒ Nacen 21,64 bebés por cada 1000 habitantes.
- Tasa de paro: 12 % ⇒ 12 parados por cada 100 personas en edad laboral.
- Tasa de alcoholemia: 0,15 ⇒ 0,15 cm^3 de alcohol por litro de sangre.

5.2. Números índice

Un número índice, NI, es una herramienta o parámetro creada para estudiar la variación en el tiempo de una determinada magnitud económica.

$$NI = \frac{Medida\ actual\ de\ la\ magnitud}{Medida\ antigua\ de\ la\ magnitud}$$

Destacamos:

El índice de las bolsas refleja el valor global de las empresas que se cotizan en ellas. El valor del Índice en cada momento se obtiene mediante cálculos muy complejos en los que se valoran las cotizaciones de las acciones y la cantidad que se comercializa de cada una. Más que su valor concreto, se puede prestar atención a su variación porcentual respecto a una fecha anterior:

- *El IBEX 35 ha subido un 0,80 % durante esta semana.*

Especialmente importante es el **índice de precios al consumo** (**IPC**): No tiene, en cada momento, un valor determinado, sino que se evalúa en referencia al año (o al mes) anterior:

- *El IPC ha subido en mayo un 0,28 %, con lo que acumula un crecimiento anual del 3,56 %.*

Para calcular la variación mensual del IPC, se tiene en cuenta la variación del precio de cada uno de los bienes de consumo y la cantidad invertida en el mismo durante ese mes. El índice de precios al consumo es un número índice que se utiliza para medir la variación de la inflación. Se calcula tomando el precio de una serie de artículos representativos de consumo habitual (cesta de la compra), p_1, p_2, p_3, … Y multiplicando dichos precios por su correspondiente peso o ponderación, q_1, q_2, q_3, … según la importancia asignada en el momento

$$IPC = \frac{Medida\ actual\ de\ la\ magnitud}{Medida\ antigua\ de\ la\ magnitud} = \frac{p_{11}q_{11} + p_{21}q_{21} + p_{31}q_{31} + \ldots}{p_{10}q_{10} + p_{20}q_{20} + p_{30}q_{30} + \ldots}$$

5.3. Interés simple

Cuando depositamos una determinada cantidad de dinero capital en un banco lo que hacemos es prestar este capital a la entidad bancaria y ésta, a cambio, nos da un tanto por ciento del dinero que depositamos.

Por ejemplo,

- Si depositamos 50000 € en una libreta de ahorro al 1,5% cada año recibimos:

$$\frac{50000.1{,}5}{100} = 50000.0{,}015 = 750€$$

La cantidad que hemos depositado, 50000 € es el **capital**: El beneficio obtenido,750 €, se llama **interés.** La cantidad que producen 100 € cada año,1,5 €,se llama **rédito o tanto por ciento**. Y la cantidad que produce 1 € anualmente, 0,015€, se llama **tanto por uno.**

Un capital colocado al R % en un año produce $\frac{C.R}{100}$ de interés, luego en t años producirá un interés de:

$$\boxed{I = \frac{C.R.t}{100} = Crt}$$

- **Capital, *C*,** es la cantidad de dinero que depositamos en una entidad financiera.
- **Interés, *I*,** es la cantidad de dinero producida por un capital de un interés determinado.
- **Rédito o tanto por ciento, *R*,** es la ganancia que producen 100 € en un año.
- **Tanto por uno, *r*,** es la ganancia que produce 1 € en un año.
- Se verifica: $r = \frac{R}{100}$

INTERES SIMPLE			
FORMA GENERAL PARA CALCULAR INTERES:	$I = C.i.t$		
1.- TIEMPO EN AÑOS	$I = C.\frac{i}{100}.t$	4.- TIEMPO EN SEMESTRE	$I = C.\frac{i}{200}.t$
2.- TIEMPO EN MESES	$I = C.\frac{i}{1200}.t$	5.- TIEMPO EN TRIMESTRE	$I = C.\frac{i}{400}.t$
3.- TIEMPO EN DIAS	$I = C.\frac{i}{36000}.t$	6.- TIEMPO EN BIMESTRE	$I = C.\frac{i}{600}.t$
CALCULO DEL MONTO I	M= C + I MATEMATICA_EDKEN	CALCULO DEL MONTO II.	M= C (1+ i.t)

Actividades resueltas

- Colocamos en un banco 10000 € al 2 %, percibiendo los intereses semestralmente. Si hemos cobrado 600 € en concepto de intereses. ¿Cuánto tiempo hemos tenido el dinero en el banco?

Al ser el cobro de intereses semestral, la fórmula que aplicamos es:

$$I = \frac{CrT}{2} \Rightarrow T = \frac{2I}{Cr} = \frac{2.600}{10000.0{,}02} = 6 \textbf{ semestres.}$$

Esto significa que el dinero ha estado depositado en el banco 6 semestres, o lo que es lo mismo, 36 meses.

5.4. Interés compuesto

Cuando no cobramos los intereses en los distintos periodos de tiempo sino que éstos se van sumando al capital, éste se va incrementando. A este proceso le llamamos **capitalización** y afirmamos que hemos colocado el capital a interés compuesto.

Colocar un capital a **interés compuesto** significa que el capital se va incrementando con los intereses producidos en cada periodo de tiempo.

Al capital existente en cada momento, le llamamos **montante.**

Cuando colocamos un capital, C, al tanto por uno, r, al final del primer año tenemos un montante de:

$$M_1 = C + Cr = C(1 + r)^1.$$

Al final del segundo año, tendremos:

$$M_2 = C(1 + r) + C(1 + r)r = C(1 + r)(1 + r) = C(1 + r)^2.$$

Al final del tercer año, tendremos:

$$M_3 = C(1 + r)^2 + C(1 + r)^2 r = C(1 + r)^2(1 + r) = C(1 + r)^3.$$

Razonando y siguiendo la misma pauta, llegamos a obtener que el montante, al cabo de t años, es:

$$M = C(1+r)^t$$

De forma análoga, obtenemos el montante cuando capitalizamos n veces al año o en n periodos cada año:

$$M = C\left(1+\frac{r}{n}\right)^T$$

Siendo T el número de periodos.

Actividades resueltas

- ¿Durante cuánto tiempo ha de invertir un capital de 12000 € al 2 % de interés compuesto para llegar a obtener un montante de 12325 € si la capitalización se produce trimestralmente?

Como la capitalización es trimestral, n es 4. Por tanto:

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$M = C\left(1+\frac{r}{4}\right)^T \Rightarrow \log M = \log C + T\log\left(1+\frac{r}{4}\right) \Rightarrow T = \frac{\log M - \log C}{\log\left(1+\frac{r}{4}\right)}$$ = 5,5 trimestres.

Por lo tanto el capital ha de invertirse durante 5,5 trimestres = 16 meses y medio.

5.5. Anualidades de capitalización

En muchas situaciones se plantea el problema de conseguir u obtener un capital al cabo de un número determinado t de años. Para ello, hacemos unos pagos o aportaciones, siempre iguales, al principio de cada uno de los años. Estos pagos o aportaciones se llaman **anualidades de capitalización**.

Recuerda que:

Las anualidades de capitalización son pagos o aportaciones fijas que hacemos al principio de cada año para formar, junto con sus intereses compuestos, un capital al cabo de un número determinado de t años.

Supongamos que la anualidad de capitalización es a, que el tanto por uno anual es r y el tiempo de capitalización es de t años.

Utilizando la expresión de interés compuesto, obtenemos que la anualidad que entregamos al inicio del primer año se convierte o capitaliza en el siguiente montante:

$$a\,(1+r)^t$$

La segunda anualidad, entregada al principio del segundo año, capitaliza al cabo de $t-1$ años el montante:

$$a\,(1+r)^{t-1}$$

La tercera anualidad capitaliza en $t-2$ años el montante:

$$a\,(1+r)^{t-2}$$

y así sucesivamente, la anualidad *t-ésima*, que entregamos al comienzo del *t-ésimo* año o último, capitaliza en 1 año el siguiente montante:

$$a\,(1+r)^1$$

La suma de todos estos montantes da lugar a la capitalización del capital C:

$$\mathrm{C} = a\,(1+r)^1 + a\,(1+r)^2 + \ldots + a\,(1+r)^{t-1} + a\,(1+r)^t$$

Aplicando la expresión de la suma de n términos consecutivos de una sucesión o progresión geométrica a la progresión anterior de razón (1 + r) y números de términos t, obtenemos:

$$C = \frac{a(1+r)^t(1+r) - a(1+r)}{(1+r)-1} = \frac{a(1+r).\left[\ (1+r)^t - 1\ \right]}{r}$$

Recuerda que:

Una sucesión: $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ se llama sucesión o progresión **geométrica** si cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante, r, llamada razón de la progresión: $a_2 = a_1 \cdot r$; $a_3 = a_2.r$; $a_n = a_{n-1}.r$.

Por tanto la suma de los n primeros términos $a_1 + a_2 + \ldots. + a_n$ vale: $S_n = \dfrac{a_n.p - a_1}{p-1}$

Cuando los pagos o aportaciones los hacemos al principio de cada mes, la capitalización no es anual, lo que capitalizamos cada mes es:

$$C=\frac{a\left(1+\frac{r}{12}\right)\left[\left(1+\frac{r}{12}\right)^{T}-1\right]}{\frac{r}{12}}$$

siendo a la aportación mensual y T el tiempo de capitalización en meses.

En general, cuando los pagos los hacemos n veces al año, el capital obtenido es:

$$C=\frac{a\left(1+\frac{r}{n}\right)\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{T}-1\right]}{\frac{r}{n}}$$

siendo T el número de periodos de capitalización.

Actividades resueltas

- Una persona, al cumplir los 40 años, decide hacer un plan de ahorro. Llega con el banco a un acuerdo de capitalizar trimestralmente al 3 % anual, depositando 90 € al inicio de cada trimestre. ¿Qué capital obtendrá al cumplir los 60 años?

La capitalización es trimestral, con lo cual el número de periodos en un año es n = 4. El tiempo de capitalización es 60 – 40=20 años, que expresado en periodos de capitalización o trimestres, es de 4·20 = 80 trimestres. Se trata de una capitalización no anual.

El capital que obtendrá según la fórmula que hemos visto antes será:

$$C=\frac{a\left(1+\frac{r}{4}\right)\left[\left(1+\frac{r}{4}\right)^{T}-1\right]}{\frac{r}{4}}=(\frac{0{,}03}{4})/90.\left(1+\frac{0{,}03}{4}\right).\left[\left(1+\frac{0{,}03}{4}\right)^{80}-1\right]=989{,}015$$

- ¿Qué anualidad tendríamos que abonar al principio de cada año durante 12 años para capitalizar o conseguir 18000 € al 3 % anual?

Se trata de una capitalización anual, por lo tanto según la fórmula siguiente obtendremos:

$$C=\frac{a.(1+r)\left[(1+r)^{t}-1\right]}{r}\Rightarrow a=\frac{rC}{(1+r).\left[(1+r)^{t}-1\right]}\Rightarrow a=\frac{0{,}03.18000}{(1+0{,}03).\left[(1+0{,}03)^{12}-1\right]}=223{,}21€$$

5.6. Tasa anual equivalente. (T.A.E.)

En cuentas de ahorro, llamamos **TAE** al tanto por ciento de crecimiento total del capital durante un año cuando los periodos de capitalización son inferiores a un año. En préstamos bancarios, la TAE, también es superior al rédito declarado. Al calcularla se incluyen los pagos fijos (comisiones, gastos) que cobra el banco para conceder el préstamo

Pago mensuales de intereses:

$$1+\frac{C}{100}=\left(1+\frac{r}{1200}\right)^{n}$$

siendo C el capital y n el número de meses

Actividades resueltas

- Si colocamos 600 € al 2 % anual con capitalización trimestral, en un año genera un montante de:

$$M=600.\left(1+\frac{0{,}02}{4}\right)^{4}=612{,}090.$$

Si ahora nos preguntamos, ¿a qué tanto por ciento anual hemos de colocar el mismo capital para generar el mismo montante con capitalización anual?

$$612{,}090=600.\left(1+\frac{T.A.E.}{100}\right)^{1}$$

Operando, obtenemos el T.A.E. = 2,015

Esto indica que el T.A.E. es el tanto por ciento anual, que genera el mismo montante que una capitalización en n periodos de tiempo al año al r % anual.

5.7. Anualidades de amortización

En la vida real es muy frecuente pedir prestado a un banco o una entidad financiera una cantidad de dinero que llamamos **deuda**. Esta deuda la devolvemos o la amortizamos mediante pagos siempre iguales, durante un número t de años consecutivos, haciendo cada pago o aportación al final de cada año. Estos pagos o aportaciones iguales se llaman **anualidades de amortización.**

Las **anualidades de amortización** son pagos o aportaciones fijas que hacemos al final de cada año, para amortizar o cancelar una deuda, junto con sus intereses compuestos, durante un número determinado, t de años.

La deuda D, al cabo de t años, al tanto por uno anual, r, capitaliza el siguiente montante:

$$M=D(1+r)^{t}$$

Las anualidades, a, que aportamos al final de cada año, capitalizan los siguientes montantes:

La primera anualidad en $t-1$ años se convierte en: $a\,(1+r)^{t-1}$

La segunda anualidad en $t-2$ años se convierte en: $a\,(1+r)^{t-2}$

La tercera anualidad en $t-3$ años se convierte en: $a\,(1+r)^{t-3}$

Y así sucesivamente, la anualidad t-ésima, que aportamos al final del último año, es: a

La suma de los anteriores montantes ha de coincidir con M

$$M=D(1+r)^{t}=a+a(1+r)+\ldots+a(1+r)^{t-2}+a(1+r)^{t-1}$$

Aplicando la expresión de la suma de n términos consecutivos de una sucesión o progresión geométrica a la sucesión anterior de razón 1 + r y de t términos, obtenemos:

$$D\cdot(1+r)^t = \frac{a(1+r)^{t-1}.(1+r)-a}{(1+r)-1}$$

Y de aquí obtenemos la expresión que nos da la anualidad de la amortización:

$$\boxed{a=\frac{Dr(1+r)^t}{(1+r)^t-1}}$$

Cuando los pagos o aportaciones los hacemos al final de cada mes, la amortización mensual viene dada por:

$$a=\frac{D.\frac{r}{12}.\left(1+\frac{r}{12}\right)^T}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^T-1}$$

donde D es la deuda y T es el tiempo de amortización en meses.

En general, cuando los pagos los hacemos n veces al año, la cuota de amortización es:

$$a=\frac{D.\frac{r}{n}.\left(1+\frac{r}{n}\right)^T}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^T-1}$$

siendo T el número de periodos de amortización.

Actividades resueltas

- En el Mercado de Ocasión del coche usado nos venden un coche por 1800 €. La empresa tiene una entidad financiera, la cual cobra un 2 % anual. ¿Cuál debe ser la amortización mensual para saldar la deuda en 2 años?

La amortización es mensual, por lo que el número n de periodos en un año es de 12 y la expresión que utilizamos es:

$$a=\frac{D.\frac{r}{12}.\left(1+\frac{r}{12}\right)^T}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^T-1}=-\frac{1800.\frac{0,02}{12}.\left(1+\frac{0,02}{12}\right)^{24}}{\left(1+\frac{0,02}{12}\right)^{24}-1}=76,58\text{ €}$$

- La empresa Frío Industrial ha adquirido una máquina por la que se compromete a pagar 12000 € en el momento de la adquisición y 5000 € al final de cada año, durante 10 años. Si se aplica un 2 % de interés anual, ¿cuál es el valor de la máquina?

La deuda, D, que la empresa amortiza en 10 anualidades es:

$$D=\frac{a\left[(1+r)^t-1\right]}{r(1+r)^t}=\frac{5000.\left[(1+0,02)^{10}-1\right]}{0,02.(1+0,02)^{10}}=44914,47$$

Luego el valor de la máquina es: 44914,47+12000=56914,47

Actividades propuestas

68. Un empresario incrementa el precio de sus productos en un 5 % anual. Actualmente, uno de sus productos vale 18 €. Responde a las siguientes cuestiones:

a. ¿Cuánto costará el producto dentro de 4 años?

b. ¿Cuánto costaba hace 4 años?

c. ¿Cuántos años han de pasar para que el precio actual del producto se duplique?

69. Calcula el tiempo que debe de estar colocado un capital de 4500 € en una cuenta corriente al 2 % de interés compuesto anual para que el capital se duplique

70. Calcula el tiempo necesario para que un capital impuesto a interés compuesto al 3 % anual se duplique. ¿Y para que se triplique?

71. ¿Durante cuánto tiempo hemos de abonar mensualidades de 60 € al 4 % anual para conseguir capitalizar 6500 €?

72. El abuelo de Luis, al nacer éste, decidió ingresar en un banco un capital de 3600 € a interés compuesto anual del 3 %. ¿Cuánto dinero recibirá al cumplir 25 años? Si la capitalización se hubiera hecho semestral, ¿cuánto dinero hubiera recibido?

73. Una persona entrega al principio de cada mes y durante 4 años una cantidad fija de 60 €.La capitalización es mensual al 3% anual. ¿Qué capital tendrá al final de los 4años?

74. Una persona compra un piso en 90000 €. A la firma del contrato entrega 18000 € y el resto lo paga una entidad financiera que le ha concedido el préstamo correspondiente. Esta entidad le cobra el 2 % anual y las cuotas de amortización mensuales. ¿A cuánto asciende cada una de estas cuotas si ha de saldar la deuda en 20 años?

75. Una empresa maderera compra un camión, el cual se compromete a pagar en 13 anualidades al 3 %.cada anualidad de amortización asciende a 16200 €. ¿Cuánto costó el camión?

CURIOSIDADES. REVISTA

CURIOSIDADES SOBRE NÚMEROS IRRACIONALES:

Hay tres números de gran importancia en matemáticas y que, paradójicamente, nombramos con una letra:

• El número designado con la letra griega π = 3,14159... (Pi) relaciona la longitud de la circunferencia con su radio (Longitud = $2 \cdot \pi \cdot R$).

• El número e = 2,71828..., inicial del apellido de su descubridor Leonhard Euler (matemático suizo del siglo XVIII).

• El número designado con la letra griega F = 1,61803... (Fi), llamado número de oro, es la inicial del nombre del escultor griego Fidias, que lo utilizó en sus obras.

Los tres números tienen infinitas cifras decimales y no son periódicos (sus cifras decimales no se repiten periódicamente). Son, por tanto, números irracionales.

Desde el punto de vista matemático, existe una diferencia importante entre los dos primeros y el tercero: mientras que π y e no son solución de ninguna ecuación polinómica, el número de oro, F = , es una de las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - x - 1 = 0$.

El número π

El hecho de que la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es constante se conocen desde hace tiempo.Los primeros valores de π fueron calculados midiendo directamente una circunferencia y su correspondiente diámetro.

En el siglo XVII la relación se convirtió en un número, y fue identificado con el nombre de "Pi", de *periphereia*, nombre que los griegos daban al perímetro de un círculo.

A lo largo de la historia, el valor del número π ha tenido muchas variaciones:

En el antiguo **Egipto,** se tomaba π = 3,1605 y en la antigua **Babilonia,** era π = 3.

En **China,** las aproximaciones para π fueron varias: 3,1447; 3,10; 3,14.

• En la **Biblia,** π es 3.

• Los **árabes,** trabajando con polígonos inscritos en una circunferencia, obtuvieron hasta 17 decimales exactos de π.

El número e

El número e es un número real cuyo valor es 2,718281828459...

Leonhard Euler, matemático del siglo XVIII, fue el primero en estudiar este número (calculó hasta 23 de sus cifras decimales) y en utilizar la letra e para nombrarlo.

Con la llegada de los ordenadores, el cálculo se simplificó y rápidamente los progresos fueron enormes. Así, por ejemplo, en el año 2000, utilizando un programa de cálculo en un ordenador Pentium III 800, se obtuvieron 12 884 901

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

000 cifras decimales de este número, para lo que se necesitaron 167 horas.
Son muchas las aplicaciones que tiene este número:

• Una cadena o un cable colgados por sus extremos, tienden a adoptar la forma de una curva muy conocida cuya expresión analítica es: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

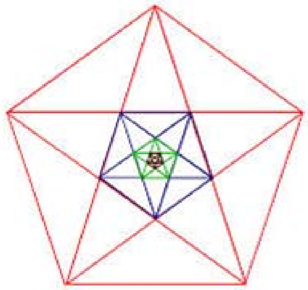
Una de las numerosas aplicaciones del número *e* en biología es el crecimiento exponencial de poblaciones. Este tipo de crecimiento surge cuando no hay factores que limiten el crecimiento. En esos casos se aplica la fórmula: $P = P_0 \cdot e^t$ que permite averiguar cuál será la población *P* en un tiempo *t* a partir de la población inicial P_0.

El número de oro, Φ

Aunque no fue hasta el siglo XX cuando el matemático Mark Borr designó al número áureo con su símbolo Φ(fi, sexta letra del abecedario griego) en honor a Fidias, sus comienzos se sitúan en Egipto por su aparición en construcciones de pirámides que datan del 2600 a.C.

Fueron los griegos quienes explotaron al máximo este número, usándolo en todas las facetas del arte.

Concretamente, los seguidores de Pitágoras tenían la estrella regular de cinco puntas (obtenida con las diagonales de un pentágono regular y en la que Φ aparecía como proporción entre la diagonal del pentágono y su lado) como figura emblema de su sociedad, hasta el punto de llevarla tatuada en el dorso de sus manos. Esta estrella representaba la vida y, puesta con el vértice superior hacia abajo, lo maléfico.



Esta figura les fascinaba por lo que en ella se puede encontrar (segmentos proporcionales, triángulos semejantes…), pero, sobre todo, por su carácter de autorreproductividad hasta el infinito:

(Información sacada de Wikipedia)

RESUMEN

Noción	*Descripción*	*Ejemplos*
Números reales	Está formado por la unión de los números racionales y los números irracionales	5, –4, 2/3, 7'5, π, e, Φ…
Valor absoluto	$\|x\| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$	|32| = 32 = |+32|
Intervalos	Abierto : $(a, b) = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$ Cerrado: $[a, b] = \{x \in \Re \mid a \leq x \leq b\}$ Semiabierto (izq): $(a, b] = \{x \in \Re \mid a < x \leq b\}$ Semiabierto (der): $[a, b) = \{x \in \Re \mid a \leq x < b\}$	(3, 5) [3, 5] (2, 8] [1, 7)
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
Suma, resta y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$p = -3x + 6$; $q = x^2 + 4$. $p + q = x^2 - 3x + 10$; $p - q = -x^2 - 3x + 2$; $p \cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24$.
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	
Fracciones algebraicas	Es una fracción de expresiones algebraicas	$\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$
Ecuaciones de primer y segundo grado	Son igualdades entre polinomios (de primer o segundo grado).	$\dfrac{7(x-1)}{3} + \dfrac{5x}{6} = 1 - \dfrac{x}{2}$
Desigualdades de primer o segundo grado	Desigualdades entre polinomios de primer o segundo grado	$x^2 - 6x + 5 > 0$ su solución es el intervalo (1, 5).
Parámetros económicos y sociales	Problemas financieros que se dan en la realidad y su solución	Tasas Números índice. Interés simple y compuesto T.A.E
Anualidades de capitalización o de amortización	Son pagos que hacemos al principio de cada año para formar o amortizar, junto con sus intereses compuestos, un capital al cabo de un número determinado de t años.	$\boxed{C = \dfrac{a(1+r).\left[(1+r)^t - 1\right]}{r}}$ $\boxed{a = \dfrac{Dr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}}$

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Números racionales e irracionales:

1) Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales y pasa a fracción los racionales:

$$0;\ -0{,}5;\ \sqrt{5};3{,}72;\frac{-1}{7};2{,}321321...,-9{,}9;9^{1};\sqrt{\sqrt{4}};3{,}222;5{,}034212121...$$

2) Representa, aproximadamente, en la recta real los números: 0,3;-8; $\sqrt{3}$,1,2222...;3,5; $\sqrt{7};\frac{1}{7};3{,}777...$

3) Escribe dos números en las condiciones siguientes:
   a) Mayores que 0,12 y menores que 0,13
   b) Comprendidos entre 2,35 y 2,36.Comprueba que la diferencia entre estos números y 2,36 es menor que una centésima

4) Cuál será el error absoluto y el error relativo cometidos al hacer las siguientes aproximaciones:
   a) $\sqrt{3}$ por 1,73
   b) Π +1 por 4,1
   c) Redondeo a cuatro cifras del número Π

5) Dados los intervalos:

A = { $x\in\Re/-10\leq x<1$ }; B = $\{x\in\Re/1/2<x\leq 3\}$; C=$\Re$-(1,2)

Se pide:

   a) Representarlos en la recta real
   b) Calcular sus longitudes
   c) C)Calcular: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\cup C$, $(A\cap C)\cup B$, $A\cup B\cup C$, $A\cap B\cap C$

6) Calcula *x* en las siguientes ecuaciones: (*pista*: *x* puede tener dos valores)

a) $|x| = 5$ b) $|x-4| = 0$ c) $|3x+9|=21$

7) Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

a) $|x| < 1$

b) $|x| \leq 1$

c) $|x| > 1$

d) $|x| \geq 1$

8) Halla dos números que disten 6 unidades de 3, y otros dos que disten 3,5 unidades de -2, calcula después la diferencia entre el mayor y el menor de todos estos números.

9) Escribe el intervalo $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

10) Escribe el intervalo formado por los números reales *x* que cumplen $|x-8| \leq 3$.

Polinomios:

11) Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\dfrac{7x-9}{(x+3)\cdot(2x-16)}$ b) $\dfrac{-5x+7}{x^2-5x+6}$

c) $\dfrac{9x^3-2x}{-2x^4-3x^2-4}$ d) $\dfrac{2x-3y+5}{x^2+y^2}$

12) Calcular cuánto debe valer la letra m para que el valor numérico de la expresión algebraica siguiente sea –2 para $x=0$.

$$\frac{x^3-mx+4}{(x^4-1)(mx+2)}$$

13) Consideremos los polinomios $p(x)=-3x^3+2x^2-5x-4$, $q(x)=2x^4+3x^3-4x^2+5x+6$ y $r(x)=3x^2+5x-7$. Realiza las siguientes operaciones:

a) $p+q+r$ b) $p-q$

c) $p\cdot r$ d) $p\cdot r-q$

14) Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $3x^4-2x^3-5x^2+7x-9$ entre $3x^2+2x-5$

b) $6x^5-7x^4+8x^3+9x^2-10x-5$ entre x^3+3x+5

15) Señala sin efectuar la división, si las siguientes divisiones son exactas o no:

a) $\dfrac{x^5+7x^4-13x^3+5x^2-17x+5}{x-3}$

b) $\dfrac{x^5+x^4-3x^3+3x^2-4x+4}{x-2}$

c) $\dfrac{9x^5+7x^4-3x^3+5x^2-17x-1}{x-1}$

16) Construye un polinomio de grado 2 tal que el número 4 sea raíz suya.

17) Escribe dos polinomios de grados diferentes y que tengan en común las raíces 2 y 3.

18) Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

19) Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x)=x^6+x^4+x^2+x+1$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x)=5x^4+5x^2+1$.

20) Halla las raíces enteras o racionales de los siguientes polinomios:

a) $4x^3+11x^2+6x-3$

b) $3x^3-2x^2+6x-3$

c) $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

21) Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

- $3x^3 + 11x^2 + 5x + 3$
- $5x^3 + 5x^2 + x - 1$
- $2x^3 + x^2 + 6x - 3$
- $3x^3 - 6x^2 + x - 2$

22) Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

- $\dfrac{x-1}{x^2-3x} - \dfrac{4x}{x^2-6x+9}$
- $\dfrac{x-1}{x^2-3x} - \dfrac{2x^2}{x^2-6x+9}$
- $\dfrac{x+2}{x^2-3x} \cdot \dfrac{2x}{x^2-6x+9}$
- $\dfrac{x-1}{x^2-3x} : \dfrac{2x}{x^2-6x+9}$

23) Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

- $x^2 - 6x + 9$
- $x^4 + 8x^2 + 16$
- $x^2 + \sqrt{20}\,xy + 5y^2$
- $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
- $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
- $x^2 - 36$
- $5x^2 + 1$
- $5x^2 - 11$
- $x^4 - 3y^2$

24) Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)} + \dfrac{6}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x+y}{x-y} \cdot \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

25) Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^2}\right) : \left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x-a} : \dfrac{x+a}{x-a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) : \dfrac{ab}{a-b}$

26) Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x-y}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x+y}}:\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a+y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a-y}}$ b) $\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}}\cdot\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}}$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas:

28) Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{3x-1}{2x-4}=\dfrac{5}{9}$ b) $\dfrac{x}{2}+5=\dfrac{3x}{6}-7$ c) $\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{5x}{x-1}-2$

29) Resolver las siguientes ecuaciones indicando cuantas soluciones tienen y cuales son:

a) $\dfrac{16x^3-7}{2x^2-3}=5+8x$ b) $x^4+8x^2-12=0$

c) $80x^4-48x^2+7=0$ d) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(x+5)^2}{25}=1$

30) El cateto mayor de un triángulo rectángulo es una unidad mayor que el cateto menor. La hipotenusa es tres unidades mayor que el cateto menor. Se pide:

a) Escribir la expresión algebraica que resulta de aplicar el Teorema de Pitágoras.
b) Calcula la hipotenusa y los catetos.

31) En una competición de baloncesto a doble vuelta participan doce equipos. Cada partido ganado vale 2 puntos y los partidos perdidos, 1 punto (no puede haber empates). Al final de la competición, un equipo tiene 36 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado?

32) Una caja de forma cúbica se llena con cierto número de cubitos de un centímetro cúbico y sobran 71 cubitos; pero si todos los cubitos que hay se ponen en otra caja que tiene un centímetro más por cada arista, faltan 200 para llenarla. Calcula las longitudes de las aristas de las dos cajas y el número de cubitos que hay.

33) Las tres cifras de un número suman 18. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtienen 594; la cifra de las decenas es la media aritmética entre las otras dos. Halla el número.

34) Queremos averiguar las edades de una familia formada por los padres y los dos hijos. Si sumamos sus edades de tres en tres, obtenemos 100, 73, 74 y 98 años, respectivamente. ¿Cúal es la edad de cada uno de ellos?

35) Resuelve:

a) $\dfrac{x}{3}-9<2$ b) $\dfrac{5x}{7}-7\le -5x$ c) $4(2x-3)>1-7x$

d) $\dfrac{3(x+4)}{5}<2x$ e) $\dfrac{2x-4}{3}+1>\dfrac{9x+6}{6}$ f) $\dfrac{7x}{2}-1<x-\dfrac{3x+5}{4}$

36) Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{3x-6}$ b) $\sqrt{-x+3}$

c) $\sqrt{15-3x}$ d) $\sqrt{-6x-24}$

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS
Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

37) Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $2x^2 - 8 < 0$ b) $-x^2 + 25 \leq 0$ c) $-x^2 + 49 \geq 0$

d) $5x^2 - 45 \geq 0$ e) $9x^2 - 1 > 0$ f) $16x^2 - 9 < 0$

g) $49x^2 - 36 < 0$ h) $121x^2 + 100 \leq 0$

38) Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $-2x^2 + 50x \leq 0$ b) $7x^2 + 3x \geq 0$ c) $2x^2 < 8x$

d) $-2x^2 - 24x \geq 0$ e) $-7x^2 + 14x < 0$ f) $-5x^2 - 30x \geq 0$

39) Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $5x^2 \leq 0$ b) $7x^2 > 0$

c) $-2x^2 < 0$ d) $6x^2 \geq 0$

40) Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x^2+x-3}$ b) $\sqrt{x^2+2x+1}$ c) $\sqrt{-1+2x-x^2}$

d) $\sqrt{x^2+3x+5}$ e) $\sqrt{-x^2+12x+36}$ f) $\sqrt{x^2+6x-27}$ g) $\sqrt{1-4x^2}$

41) Resuelve los siguientes sistemas por el método de *Gauss* y discute el resultado:

a) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+y=2 \\ y+z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x+y+5z=13 \\ x+y-4z=-6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+4y-8z=-8 \\ 4x+8y-2z=-2 \\ 8x-y-4z=-4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+t=3 \\ x+z-t=1 \\ y+z+t=3 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x+4y-z=6 \\ 6x-6y+2z=2 \\ x-y+2x=-2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x-2y+3z+4t=6 \\ 2x-y+z-t=1 \\ x-y+3z+2t=5 \\ 3x-y+2z-3t=1 \end{cases}$

Problemas de Matemáticas Financieras

42) Una persona entrega al principio de cada mes y durante 4 años una cantidad fija de 100€.La capitalización es mensual al 5 % anual. ¿Qué capital tendrá al final de los 4 años?

43) La abuela de María, al nacer éste, decidió ingresar en un banco un capital de 6000 € a interés compuesto anual del 7,5 %. ¿Cuánto dinero recibirá al cumplir 25 años?. Si la capitalización se hubiera hecho semestral, ¿cuánto dinero hubiera recibido?

44) Tasa Anual Equivalente (T.A.E.). Si colocamos 600 € al 8 % anual con capitalización trimestral, en un año, ¿qué montante genera? A que tanto por ciento debemos colocar el mismo capital para generar el mismo montante si la capitalización es anual.

45) Calcula el T.A.E. en los siguientes casos:

a) Partiendo del montante que se genera en el problema anterior, cuando los intereses se devengan mensualmente al 3% anual.

b) Los intereses se devengan trimestralmente al 4 % anual.

c) Los intereses se devengan diariamente al 5 % anual.

d) Encuentra la fórmula general para calcular el T.A.E.

46) Una persona compra un piso por 150000 €. A la firma del contrato entrega 30000 € y el resto lo paga una entidad financiera que le ha concedido el préstamo correspondiente. Esta entidad le cobra un 9 % anual y las cuotas de amortización mensuales. ¿A cuánto asciende cada una de estas cuotas si ha de saldar la deuda en 20 años?

47) Tu hermana se ha comprado una moto cuyo valor es de 18000 €. La va a pagar mediante cuotas trimestrales de 75 € al 6 % anual. ¿Cuántos años tardará en pagar la moto?

48) Al comienzo de cada uno de 4 años consecutivos depositamos en una libreta de ahorro 2000 €. Al comenzar el quinto año, sacamos 6000 € de la libreta. ¿Qué cantidad de dinero queda en la libreta si sabemos que los intereses son compuestos al 4,5 % anual?

49) ¿A qué tanto por ciento anual debe prestarse un capital puesto a interés compuesto para que en 20 años se duplique? ¿Y para que se duplique en 10 años?

50) ¿Cuál es la cuota mensual de amortización de un préstamo hipotecario de 54000 € a 15 años al 5 % anual? ¿Qué cantidad de dinero pagamos durante los 15 años?

AUTOEVALUACIÓN

1. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

d) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

2. Considera el polinomio $2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 3$. ¿Cuál de los siguientes números enteros es un candidato *razonable* para ser una raíz suya?

a) 3 b) 2 c) –11 d) –7

3. La desigualdad 2 < *x* < 7 se verifica para los valores:

a) 2, 3 y 6 b) 3, 4’7 y 6 c) 3, 5’2 y 7 d) 4, 5 y 8

4. La solución de la inecuación 3,4 + 5,2*x* – 8,1*x* < 9,4 + 7,3*x* es:

a) $x < -10/17$ b) $x > +6/10{,}2$ c) $x > -10/1{,}7$ d) $x < +6/10{,}2$

5. La suma de las edades de dos personas es mayor de 40 años y su diferencia menor o igual que 8 años. ¿Cuál de los siguientes sistemas de inecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $\begin{cases} x + y > 40 \\ y - x \le 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \ge 40 \\ y - x < 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y > 40 \\ x - y < 8 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x + y < 40 \\ x - y \le 8 \end{cases}$

6. El perímetro de un rectángulo es menor que 14 cm. Si la base es mayor que el doble de la altura menos 3 cm, algún valor que verifica es sistema es:

a) base = 4 cm, altura = 1 cm b) base = 2 cm, altura = 3 cm

c) base = 6, altura = 4cm d) base = 9 cm, altura = 2 cm

7. Una inecuación cuya solución sea el intervalo (–∞, 5) es:

a) $5x - 3x + 2 < 9x + 2$ b) $8x - 3x + 7 < 9x + 2$ c) $5x - 3x + 2 < 7x + 27$ d) $5x - 3x + 2 > 7x + 27$

8. La solución de la inecuación $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ es:

a) (1, 2) b) (–∞, 1) c) $x < 1 \cup x > 2$ d) (–1, 2)

9. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones?: $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$

a) $x = 5$ $y = 0$ $z = -2$ b) $x = 5$ $y = 0$ $z = 1$ c) $x = -2$ $y = 0$ $z = 5$ d) $x = 0$ $y = -z = -2$

10. En el mercado de ocasión del coche usado nos venden un coche por 3000 €.La empresa tiene una entidad financiera que cobra un 8 % anual. ¿Cuál debe ser la amortización mensual para saldar la deuda en 2 años?

a) 136,382 € b) 136,482 € c) 135,383 € d)136,3853 €