MATEMÁTICAS: 4ºB ESO
Capítulo 14:
Azar y Probabilidad

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Fernando Blasco

Revisora: Raquel Caro

Ilustraciones: Fernando Blasco, Banco de Imágenes de INTEF y Wikimedia

Resumen

Todos los días utilizamos conceptos probabilísticos informalmente: decidimos si llevarnos abrigo o no cuando salimos por la mañana de casa, jugamos a juegos de azar o de estrategia, leemos estadísticas y sondeos o nos preguntamos si hoy lloverá. Sin embargo nuestra intuición probabilística no está muy desarrollada. En este capítulo introducimos algunas reglas probabilísticas formales y mostramos como se puede utilizar la combinatoria o los diagramas de árbol para calcular probabilidades. En realidad, el único secreto consiste en ser capaces de contar bien. Con estos conocimientos no dejaremos que otros manipulen estadísticas. El conocimiento nos dará la clave para tomar decisiones propias.

También mostraremos algunos ejemplos que pueden parecer contrarios a nuestra intuición. Hay hechos que, haciendo las cuentas, resultan mucho más probables de lo que nos parece a simple vista. Conocerlos nos ayudará a distinguir otros casos similares.

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

1. EXPERIENCIA Y PROBABILIDAD

1.1. La ley de Laplace.

Todos los días estamos obligados a calcular probabilidades, aunque sea de modo intuitivo: ¿ganará la Liga mi equipo favorito?, ¿lloverá mañana?, ¿le gustaré a esa persona "especial" que hay en clase?, ¿me darán una beca?

A cada suceso se le puede asignar una **probabilidad**, que es un número comprendido entre 0 y 1. Cuanto mayor sea la posibilidad de que ese suceso ocurra, el número que indica la probabilidad será más próximo a 1 y si tenemos pocas opciones de que ocurra ese hecho, su probabilidad estará próxima a 0.

Nuestra experiencia (y también la teoría que puedes consultar en los Apuntes Marea Verde de 3º ESO) nos ayuda a calcular probabilidades mediante **la Ley de *Laplace*** en el caso en el que todos los casos sean equiprobables (esto es, no haya sucesos simples que tengan más probabilidad de salir que otros).

La regla de *Laplace* está basada en el *principio de razón insuficiente*: si a priori no existe ninguna razón para suponer que un resultado se puede presentar con más probabilidad que los demás, podemos considerar que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

$$P(S)=\frac{\text{número de casos favorables al suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$$

Un poco más adelante en este capítulo vamos a volver a formalizar (y ampliar) la matemática que hay debajo del cálculo de probabilidades, pero preferimos ahora mostrar unos cuantos ejemplos que nos sirvan para entrenar nuestra intuición.

Ejemplos:

- *En una clase hay* 16 *chicos y* 17 *chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado se hace un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase haya delegada?*

Como hay 17 chicas (los casos favorables) sobre una población de 33 individuos, de acuerdo con la Ley de *Laplace*, la probabilidad pedida es

$$P(S)=\frac{\text{número de casos favorables al suceso } S}{\text{número de casos posibles}}=\frac{17}{33}$$

- *En el monedero tenemos 7 monedas de 1 céntimo, 5 monedas de 5 céntimos, 6 monedas de 10 céntimos y 3 monedas de 50 céntimos. Sacamos una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad obtenida sea un número par de céntimos?*

Al sacar una moneda, para tener un número par de céntimos tiene que ser de 10 c o de 50 c. Por tanto el total de casos favorables es de 9 (hay 6 de 10 y 3 de 50). El número de casos posibles es el de monedas que tenemos en el monedero, que son 7 + 5 + 6 + 3 = 21.

La probabilidad de obtener un número par de céntimos es $P(par)=\frac{casos\,favorables}{casos\,posibles}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$.

Actividades propuestas

1. En una caja tenemos mezclados 25 clavos de 2 cm de largo, 15 clavos de 3 cm, 20 clavos de 2,5 cm y 40 clavos de 3,5 cm. Sacamos al azar un clavo de la caja (se asume que todos los clavos tienen la misma probabilidad de ser elegidos). ¿Qué probabilidad hay de que el clavo extraído tenga la menor longitud?

2. a) La ruleta francesa consta de los números que van del 0 al 36. Si sale 0 gana la banca. Decidimos apostar a "*par*" (ganaremos si sale un número par no nulo). ¿Qué probabilidad tenemos de ganar la apuesta?

b) La ruleta americana consta de un 0, un 00 y de los números que van del 1 al 36. Si sale 0 o 00 gana la banca. Decidimos apostar a "*par*" (ganaremos si sale un número par no nulo). ¿Qué probabilidad tenemos de ganar la apuesta?

3. En un instituto de 800 alumnos hay 400 estudiantes que hablan inglés, 300 que hablan francés, 100 que hablan alemán, 100 que hablan inglés y francés, 80 que hablan inglés y alemán, 50 que hablan francés y alemán y 30 que hablan los tres idiomas.

Se elige un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que hable solamente una lengua extranjera?

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

1.2. Sacando bolas de una bolsa

Una forma sencilla de hacernos una idea de los conceptos probabilísticos es hacer *experimentos* con objetos conocidos. Por ejemplo, son muy típicos los problemas en los que sacamos bolas (o caramelos, o papeletas, …) de una bolsa.

Ejemplo:

- *Una bolsa contiene* 4 *bolas blancas,* 2 *bolas rojas y una bola negra.*

a) Se extraen dos bolas al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que sean una blanca y una negra?

b) Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que tras la segunda extracción tengamos una bola blanca y una bola negra?

c) Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra?

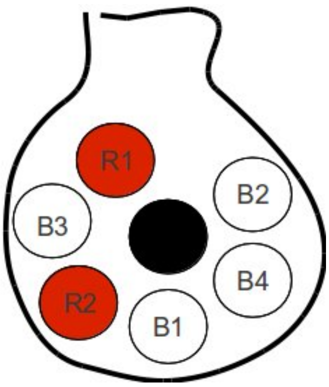
d) Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra?

e) Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido la bola negra?

f) Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido una bola blanca?

Hay muchas maneras de resolver estos ejemplos. La clave está en contar bien los casos que aparecen. Emplearemos métodos distintos, que vamos a desarrollar después a lo largo del capítulo.

a) Aunque no nos digan nada en el problema, y aunque las bolas sean indistinguibles, vamos a imaginar que cada una tiene un número escrito, como las bolas de billar americano. Eso nos ayudará a contar. Así, la situación es la representada en la figura



Formalmente no nos importa en qué orden salen las bolas. En principio cogemos las dos al mismo tiempo.

Los casos favorables son

Los casos posibles son las combinaciones de 7 elementos tomados de 2 en 2. Esto es,

$$C_{7,2} = \binom{7}{2} = 21$$

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

Así, la probabilidad pedida es $\frac{4}{21}$.

b) Aunque parezca distinto por cómo lo hemos enunciado, en este ejemplo <u>preguntamos exactamente lo mismo</u> que en el ejemplo (a). En efecto, solo nos interesa lo que ocurre tras la segunda extracción. Así que ya sabemos el resultado.
Si quisiéramos podríamos plantearlo teniendo en cuenta el orden en el que salen las bolas. En ese caso, para contar el total de casos posibles tendremos que utilizar variaciones de 7 elementos tomados de 2 en 2.

Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N, N B1, N B2, N B3, N B4 (se considera orden de extracción)
Casos posibles: son todas las formas de elegir una pareja de bolas en las que sí importa el orden de elección (primero se saca una y después otra)

$$V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$$

Así, la probabilidad pedida es $\frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$.

c) Este ejemplo cambia con respecto al anterior en que sí nos importa el orden en el que salen las bolas.
Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N
Casos posibles

$$V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$$

Probabilidad = $\frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$.

d) En este ejemplo los casos favorables son los mismos que en el ejemplo anterior. Pero hay muchas más posibilidades, puesto que volvemos a introducir en la bolsa la bola que hemos sacado en la primera extracción. Para contar el número de casos posibles se utilizan las *variaciones con repetición.*
Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N

Casos posibles:

$$VR_{7,2} = 7^2 = 49.$$

Probabilidad = $\frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{4}{49}$.

e) En este ejemplo hay un único caso favorable: que salga la bola negra 2 veces. El número de casos posibles es el que hemos calculado en el ejemplo anterior, puesto que realizamos dos extracciones y nos importa el orden.
Casos favorables: N N
Casos posibles:

$$VR_{7,2} = 7^2 = 49.$$

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

$$\text{Probabilidad} = \frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{1}{49}.$$

f) En esta ocasión volvemos a tener el mismo número de casos posibles que en los dos ejemplos anteriores. Lo que cambia es el modo de contar el número de casos favorables. Podemos hacerlo "a lo bestia" o bien utilizando combinatoria, que para eso la hemos estudiado.

Los casos posibles son B1 B1, B1 B2, B1 B3, B1 B4, B2 B1, B2 B2, B2 B3, B2 B4, B3 B1, B3 B2, B3 B3, B3 B4, B4 B1, B4 B2, B4 B3, B4 B4. Es decir, 16 casos.

Lo podríamos haber calculado de una forma mucho más sencilla teniendo en cuenta que hay 4 bolas blancas y se extraen, con reemplazamiento, 2 veces. Eso da lugar a un problema típico de variaciones con repetición.
Casos favorables:

$$VR_{4,2} = 4^2 = 16.$$

Casos posibles:

$$VR_{7,2} = 7^2 = 49.$$

$$\text{Probabilidad} = \frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{16}{49}.$$

Actividades propuestas

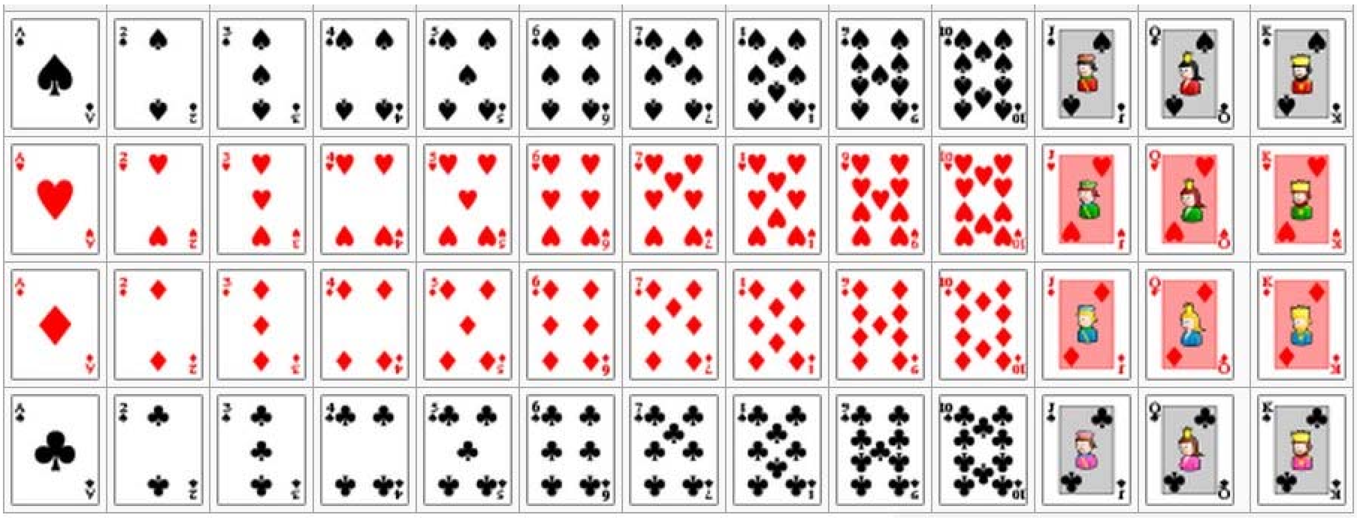
4. Vuelve a hacer todos los apartados del ejemplo anterior pero sustituyendo en cada caso "bola blanca" por "bola roja".

5. En la lotería primitiva una apuesta consiste en marcar 6 casillas de entre 49 posibles. El día del sorteo se extraen 6 bolas (de entre 49). ¿Cuál es la probabilidad de que tu apuesta coincida con la combinación ganadora? ¿Cuál es la probabilidad de que aciertes 5 números? ¿Y la de que aciertes 4 números?

1.3. Mezclando cartas

En una baraja americana tenemos 4 palos: picas, corazones, tréboles y diamantes. Las cartas de picas y de tréboles son negras, mientras que los diamantes y los corazones son cartas rojas. Cada palo tiene 13 cartas, de las que hay cartas con números del 1 al 10 y 3 figuras: la sota (J), la dama (Q) y el rey (K). En la baraja francesa (la original, pero menos vista) en lugar de aparecer J, Q, K aparecen V, D, R (Valet, Dame y Roi). Además, la baraja tiene 2 comodines, pero no los vamos a utilizar en nuestros ejemplos.

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia



Las mezclas de cartas tienen propiedades muy interesantes. De hecho hay muchos juegos de cartomagia que se basan en propiedades matemáticas de las mezclas (y no precisamente probabilísticas). En los ejemplos que vamos a ver a continuación supondremos siempre que trabajamos con una baraja bien mezclada y la extracción de las cartas se hará siempre de forma aleatoria.

Ejemplos:

- *Se reparten al azar* 5 *cartas de una baraja de póker. ¿Cuál es la probabilidad de que tengas* 4 *cartas del mismo valor?* (esa es la jugada que se llama *póker*).

No nos importa el orden, con lo que el número de manos posibles se calcula mediante combinaciones. Esto es,

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = 2\,598\,960.$$

Para contar el número de casos favorables pensaremos, de momento, en algo más concreto: cuántas posibilidades hay de obtener un *póker de ases*

La mano que nos interesa es A A A A * , donde * puede ser cualquier carta. Hay 12 posibilidades para esto. En efecto, la única elección posible es la carta que acompaña a los ases.

Así, como tenemos 13 posibles valores (del As al 10 y las 3 figuras), hay 13 · 12 = 156 casos favorables. Con ello, la probabilidad pedida es

$$P(po\text{ker}) = \frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{156}{2598960} = \frac{39}{649740}$$

- *Una jugada de* 5 *cartas se llama full si en ella hay* 3 *cartas de un valor y otras* 2 *de un valor distinto. ¿Cuál es la probabilidad de conseguir un full de Ases y Doses, esto es, AAA 22?*

Los casos posibles son los mismos de antes: el número de posibles jugadas de 5 cartas.

Para conseguir AAA tenemos 4 cartas (los 4 ases) de los que debemos escoger 3. Se calculan con combinaciones.

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4.$$

Para conseguir los doses tenemos que elegir 2 doses de entre 4. Volvemos a utilizar combinaciones.

Autor: Fernando Blasco

Revisora: Raquel Caro

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6.$$

Combinando las 4 posibilidades que tenemos para conseguir los 3 ases y las 6 posibilidades que tenemos para conseguir los 2 doses, nos queda un total de 24 formas de conseguir ese full de Ases y Doses.
Así,

$$P(AAA22) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{24}{2598960} = \frac{1}{108290}$$

- *¿Cuál es la probabilidad de conseguir un full (independientemente de su composición)?*

En el ejemplo anterior hemos calculado la probabilidad de conseguir un full concreto: el full AAA22.

Pero para conseguir un full arbitrario tenemos 13 posibilidades de elección para las 3 cartas del mismo valor y 12 para elegir las otras 2 cartas (claro, ya no podemos usar el valor que hemos elegido para el trío). Así, hay 13 · 12 posibilidades de conseguir un full concreto.

Como un full fijado se podía obtener de 24 formas diferentes (lo hemos calculado en el ejemplo anterior), el total de casos favorables es

Casos favorables = 13 · 12 · 24 = 3744.

Y así

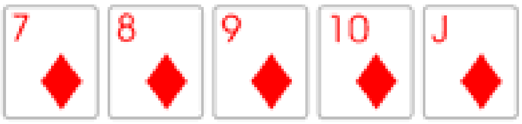
$$P(full) = \frac{3744}{2598960} = \frac{78}{54145}.$$

Actividades propuestas

6. a) Se llama *trío* a la jugada que consiste en 3 cartas del mismo valor y otras dos de diferente valor al de esas 3 y además con diferentes valores entre sí. Calcula la probabilidad de obtener un *trío de ases* en una jugada de 5 cartas.

b) Calcula la probabilidad de obtener un *trío* cualquiera.

7. a) Se llama *escalera de color* a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo ordenadas consecutivamente. Calcula la probabilidad de obtener esta *escalera de color*:



b) Calcula la probabilidad de obtener una *escalera de color* cualquiera.

8. Se llama *color* a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo que no son consecutivas. Calcula la probabilidad de obtener *color* en una jugada.

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

2. PROFUNDIZANDO EN LA TEORÍA

2.1. Combinatoria para poder contar

Los ejemplos que hemos hecho al principio del capítulo muestran lo importante que es el dominio de la combinatoria para contar los casos favorables y los casos posibles que tenemos. A modo de recordatorio, incluimos un cuadro extraído del resumen del capítulo anterior:

Permutaciones	Influye sólo el **orden**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variaciones con repetición	Influye el **orden** y los **elementos**. Los elementos pueden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influye el **orden** y los **elementos**. Los elementos NO pueden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los **elementos**. $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n} = \dfrac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \dbinom{m}{n}$	$C_{9,7} = \dbinom{9}{7} = \dfrac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$

2.2. Nomenclatura en probabilidad

Es muy importante llamar a cada cosa por su nombre. La precisión y el lenguaje en Matemáticas pueden convertir en sencillo algo que, en principio, podría parecer muy complicado.

Un **experimento aleatorio** es una acción (experimento) cuyo resultado depende del azar.

A cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio le llamaremos **caso** o **suceso elemental**.

El conjunto de todos los casos posibles se llama **espacio muestral** o **suceso seguro**.

Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral.

Si *S* es un suceso se verifica el **suceso contrario** de *S* siempre que no se verifica *S*. Lo representaremos por .

Se dice que dos sucesos son **sucesos independientes** si que se verifique uno de ellos no afecta a la probabilidad de verificación del otro.

Ejemplo:

- *Experimentos aleatorios:*

  a) Elegir una persona al azar y ver en qué día de la semana ha nacido.

  b) Sacar una carta de la baraja de póker y ver de qué palo es.

  c) Lanzar un dado de parchís y observar el número de la cara superior.

  d) Lanzar 3 monedas al aire y observar la posición en la que caen.

- *Espacios muestrales*. Para los experimentos del ejemplo anterior los espacios muestrales son, respectivamente:

  a) {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

  b) {picas, corazones, tréboles, diamantes}

  c) {1, 2, 3, 4, 5, 6}

  d) {CCC, CCX, CXX, XXX}

- *Sucesos contrarios*. Usaremos los experimentos (a), (b), (c), (d) de este ejemplo.

  a) El suceso contrario a "un día del fin de semana" es {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes}

  b) El suceso contrario a "carta roja" es {picas, tréboles}

  c) El suceso contrario a "número múltiplo de 3" es {1, 2, 4, 5}

  d) El suceso contrario a "salen las 3 caras" es {CCX, CXX, XXX}

- *Sucesos independientes*. Usaremos los experimentos (a), (b), (c), (d) de este ejemplo.

a) Los sucesos "haber nacido en fin de semana" y "haber nacido en lunes" son independientes. Los sucesos "haber nacido en fin de semana" y "haber nacido en domingo" son dependientes.

b) Los sucesos "obtener una carta roja" y "obtener una carta de picas" son independientes. Los sucesos "obtener una carta roja" y "obtener una carta de corazones" son dependientes.

c) Los sucesos "obtener un número par" y "obtener un 5" son independientes. Los sucesos "obtener un número par" y "obtener un 6" son dependientes.

d) Los sucesos "obtener tres caras" y "obtener tres cruces" son independientes. Los sucesos "Obtener tres resultados iguales" y "obtener tres cruces" son dependientes.

Como la unión de un suceso y su suceso **contrario** es el suceso seguro, se tiene que

$$P(S^C) = 1 - P(S).$$

Cuando dos sucesos son independientes, la probabilidad de que se dé el **suceso intersección** (esto es, que se verifiquen ambos sucesos a la vez) es el producto de las probabilidades de cada uno de ellos

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

Si A y B son **independientes**,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Actividades propuestas

9. Se consideran los siguientes experimentos aleatorios:

1) Se tienen 5 fichas de Scrabble formando la palabra CASAS. Se meten en una bolsa y se extraen 3 fichas.
2) Se mezcla una baraja de póker, se corta y se mira el valor de la carta superior.
3) Un monedero contiene 4 monedas de 5 céntimos, 2 monedas de 10 céntimos y 1 moneda de 20 cm. Se extraen al azar dos monedas de él.
4) De los 30 alumnos de una clase se elige uno al azar. Se le pregunta en qué mes ha nacido.

a) Describe los espacios muestrales de cada uno de los 4 experimentos aleatorios anteriores.

b) Indica los sucesos contrarios a
   1. {AAC}
   2. {A, 2, 3, 4, 5}
   3. Sacar una cantidad par de céntimos.
   4. Haber nacido en un mes en el que seguro que es verano.

c) ¿Son independientes estos pares de sucesos?
   1. {AAC} y {{ASA}, {CAS}}
   2. "Obtener un 6" y "obtener un número par"
   3. "Obtener una cantidad par de céntimos" y "sacar dos monedas de 5 céntimos"
   4. "Haber nacido en un mes que seguro es de verano" y "haber nacido en junio"

El lenguaje es muy importante a la hora de **comprender** qué nos están pidiendo en cada caso.

2.3. No todos los sucesos tienen la misma probabilidad

Hay casos en los que intuimos perfectamente que no todos los sucesos tienen la misma probabilidad. Por ejemplo, si lanzamos un dado, la probabilidad de obtener un número par es 1/2 mientras que la de obtener un múltiplo de 3 es 1/3.

En otras ocasiones nos puede costar más.

Ejemplo

- *Considera el experimento aleatorio "mezclar una baraja, cortar y mirar el color de las dos cartas que han quedado arriba".*

   a) Si escribimos el espacio muestral veremos que es {RR, RN, NN}. Claro: o bien las dos cartas son rojas, o bien las dos son negras, o bien hay una de cada color.

   b) Pero… ¿y si hubiésemos escrito el color de cada carta, por orden de aparición? En esta situación, los casos posibles serían {RR, RN, NR, NN}.

Como el lenguaje que utilizamos es imperfecto, para un mismo experimento podemos considerar dos espacios muestrales distintos. No hay problema en ello siempre que sepamos qué nos están preguntando y qué debemos hacer.

En realidad, el RN que hemos escrito en (a) se corresponde con los casos RN y NR de (b).

Trabajando con el espacio muestral de (b) todos los casos son equiprobables mientras que si trabajamos con el espacio muestral de (a) los sucesos RR y NN tienen probabilidad 1/4 mientras que RN tiene probabilidad 1/3.

Actividades resueltas

- *Se tienen* 5 *fichas de Scrabble formando la palabra* CASAS. *Se meten en una bolsa y se extraen* 3 *fichas. Da dos casos que sean equiprobables y otros dos que no lo sean.*

  Son equiprobables {AAC} y {SSC}. No son equiprobables {AAC} y {CAS}.

- *Se mezcla una baraja de póker, se corta y se suman los valores de las dos cartas superiores* (asumimos A = 1, J = 11, Q = 12, K = 13). *Da dos casos que sean equiprobables y otros dos que no lo sean.*

  En este ejemplo el espacio muestral es {2, 3, ….., 26} (los números que pueden obtenerse al sumar los valores de las dos cartas).

  Son casos equipobables {2} y {26} o {3} y {25}. No son equiprobables {2} y {3}.

- *De los* 30 *alumnos de una clase se elige uno al azar. Se le pregunta en qué mes ha nacido. Da dos casos que sean equiprobables y dos que no lo sean.*

  El espacio muestral es {enero, febrero, …, noviembre, diciembre}. En realidad no todos estos casos son equiprobables. Para saberlo tenemos que aproximar la probabilidad mediante la frecuencia relativa y para eso es necesaria la estadística. En el año 2012 los datos de nacimientos en España, por meses se reflejan en esta tabla:

enero	febrero	marzo	abril	mayo	junio	julio	agosto	sept	octubre	nov	dic
11.765	10.967	11.776	11.329	11.954	11.314	11.874	12.031	11.672	12.324	11.510	11.318

2.4. Uso de diagramas de árbol

Ya se ha utilizado la representación en diagrama de árbol para generar variaciones, combinaciones o permutaciones. Ese mismo tipo de estructura es también útil cuando hay que calcular probabilidades.

Ejemplo

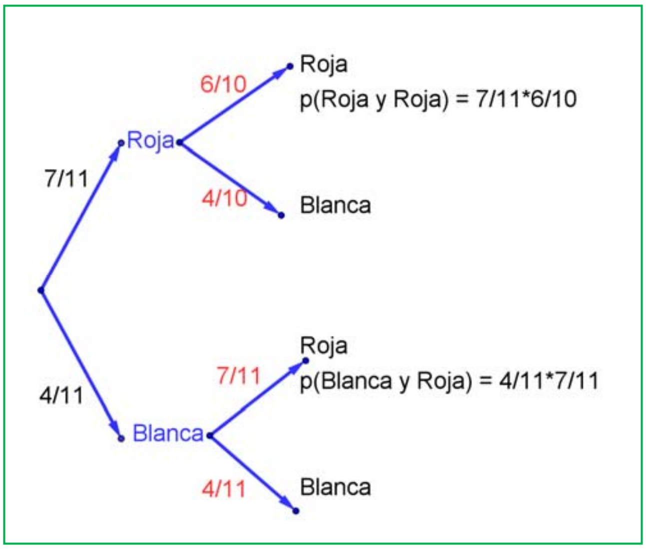
- *Tenemos una caja con 7 bolas rojas y 4 bolas blancas. Se saca una bola al azar. Si es blanca se vuelve a meter en la caja. Si es roja se deja fuera. En estas condiciones se saca otra bola de la caja. ¿Qué probabilidad hay de que esta bola sea roja?*

Pueden ocurrir dos cosas: que la bola de la primera extracción sea roja o que sea blanca.

1.- Si la bola sacada es roja (ocurre con probabilidad 7/11) la bola quedará fuera y la composición de la caja justo antes de la segunda extracción es de 6 bolas rojas y 4 bolas blancas.

La probabilidad de que en este momento se saque una bola roja es de 6/10.

2.- Si la bola sacada es blanca (ocurre con probabilidad 4/11), la bola se vuelve a meter en la caja y la composición de ésta antes de la segunda extracción será la misma que al principio. Así, la probabilidad de que en la segunda extracción salga una bola roja es de 7/11.



Se puede llegar a obtener una bola roja en la segunda extracción por dos vías: dependiendo del color de la bola que se saque en la primera extracción.

La **probabilidad total** de que salga una bola roja en la segunda extracción es:

$$P(roja) = \frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10} + \frac{4}{11}\cdot\frac{7}{11} = \frac{411}{605}$$

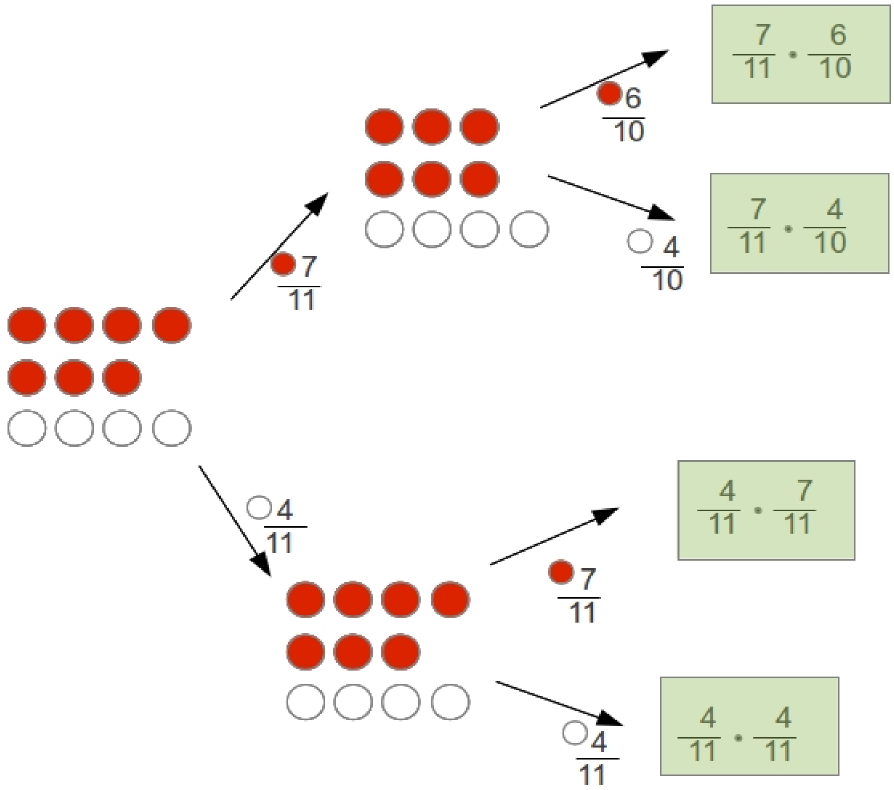
Probabilidad de obtener roja en la primera extracción

Probabilidad de obtener roja en la 2ª extracción habiendo sacado roja en la 1ª

Probabilidad de obtener blanca en la 1ª extracción

Probabilidad de obtener roja en la 2ª extracción habiendo sacado blanca en la 1ª

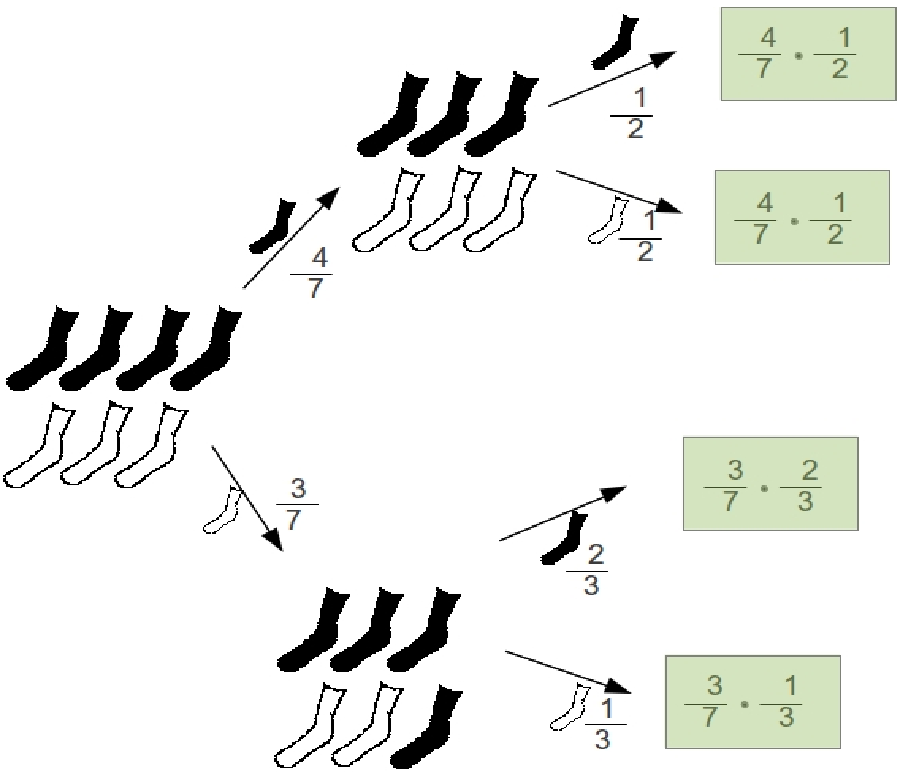
Todo este proceso se suele resumir y simplificar utilizando un **diagrama de árbol:**



Actividad resuelta

- *En un cajón tenemos 7 calcetines: 4 negros y 3 blancos. Sacamos, sin mirar, dos calcetines del cajón. ¿Qué es más probable, que sean ambos del mismo color o que sean de colores distintos?*

Haremos un diagrama de árbol calculando la probabilidad de cada caso.



Autor: Fernando Blasco

Revisora: Raquel Caro

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

La probabilidad de que obtengamos dos calcetines negros es 2/7, de que obtengamos 2 calcetines blancos es 1/7. Así tenemos que la probabilidad de obtener dos del mismo color es 3/7, frente a la probabilidad de obtener dos de colores distintos, que es 4/7.

Es más probable sacar un par de calcetines de colores distintos.

Observación

También podríamos haber resuelto este problema mediante la Ley de *Laplace*.

Casos posibles: $C_{7,2} = \binom{7}{2} = 21.$

Casos favorables a sacar 2 calcetines negros: $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6.$

Casos favorables a sacar 2 calcetines blancos: $C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3.$

Casos favorables: 6 + 3 = 9.

Probabilidad = $\dfrac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}.$

Como sacar un calcetín de cada color es el suceso contrario a éste, su probabilidad es $1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$. Es más probable este caso.

Recuerda que los problemas de Matemáticas se pueden abordar desde diferentes puntos de vista. Lo importante es que seas capaz de resolverlos. Por eso es importante conocer más de un método. En unas ocasiones será mejor utilizar uno y en otras será mejor usar un método alternativo. Por ello debes estudiar diversas “herramientas” que te ayuden a resolver los problemas que aparecen.

Actividades propuestas

10. Elabora un árbol de probabilidades para calcular la probabilidad de obtener *doble pareja* en una jugada de 5 cartas de póker. (*Doble pareja* consiste en 2 pares de cartas del mismo valor, diferentes entre sí, y una carta indiferente, de valor distinto a los dos anteriores. Por ejemplo, AA 33 Q).

11. En el monedero tengo 3 monedas de un céntimo, 2 de 5 céntimos, 3 de 10 céntimos, 1 de 20 y 1 de 50 céntimos. Saco 3 monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un número par de céntimos?

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

2.5. Probabilidad condicionada

En los casos diagramas de árbol, en cada paso aparecen probabilidades que están condicionadas a un paso anterior. En el ejemplo de la sección 2.4 la probabilidad de que en la segunda extracción la bola sea roja condicionada a que en la primera extracción había salido una bola roja era 6/10, mientras que la probabilidad de sacar una bola roja en la segunda extracción, sabiendo que en la primera había salido una bola blanca era 7/11.

En muchos casos la probabilidad que hay que determinar es una **probabilidad condicionada** a la verificación de un suceso anterior.

La probabilidad de verificación del suceso A condicionada a la verificación del suceso B se representa por *P*(*A*/*B*).

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplos

- *En el lanzamiento de un dado ha salido un número par. Calcula la probabilidad de que sea un* 6.

No es necesario formalizar esto así, pero para acostumbrarnos a la notación daremos nombres a los sucesos que intervienen:

A = Obtener un 6 = {6}

B = Obtener número par = {2, 4, 6}

Los casos posibles son {2, 4, 6} (porque nos dicen que ha salido un número par}

El único caso favorable es {6}

Así pues

P(*sacar* 6 *condicionado a par*) = $\dfrac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \dfrac{1}{3}$..

También podríamos haber calculado esto con álgebra de sucesos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

- *El* 40 % *de la población fuma, y el* 10 % *fuma y es hipertenso. ¿Cuál es la probabilidad de que un fumador sea hipertenso?*

Asumiremos que los porcentajes de población se corresponden con probabilidades. Así, la probabilidad de que un individuo elegido al azar sea fumador es 0,4 y la probabilidad de que sea fumador e hipertenso es 0,1. De este modo

A = Ser fumador e hipertenso

B = Ser fumador

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \,.$$

Como $P(A) = 0{,}1 \neq P(A/B) = 0{,}25$ los sucesos "*ser fumador*" y "*ser hipertenso*" son sucesos dependientes.

Actividades propuestas

12. Un analista deportivo, que se equivoca el 20 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito va a ganar la liga. El analista de la competencia, que se equivoca el 25 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito no va a ganar la liga. A tenor de dichos análisis. ¿Qué probabilidad hay de que nuestro equipo gane la liga?

13. Una compañía de productos avícolas empaqueta docenas de huevos en tres lugares diferentes. El 40 % de la producción tiene lugar en la planta A, el 25 % en B y el resto en C. Un control de calidad nos dice que un 5 % de los paquetes elaborados en A, un 10 % de los de B y un 8 % de los de C contienen algún huevo roto. ¿Qué probabilidad hay de que nos toque una docena de huevos con algún huevo roto?

14. En un instituto con 300 alumnos se está estudiando si la calificación obtenida en *Lengua Española* tiene que ver con la calificación obtenida en *Matemáticas*. Tras hacer una encuesta, se obtienen los siguientes resultados:

		Matemáticas		
		Sobresaliente	**Notable**	**Otro**
Lengua	**Sobresaliente**	110	25	18
	Notable	40	70	40
	Otro	10	5	2

Se elige un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un sobresaliente en *Lengua*, si lo ha tenido en *Matemáticas*?

¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un sobresaliente en *Matemáticas*, si lo ha tenido en *Lengua*?

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

3. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

3.1. Ejemplos comunes

Actividades resueltas

- *En un cajón tengo un par de calcetines rojos, un par de calcetines negros y un par de calcetines blancos. Al hacer la maleta, con las prisas, cojo 3 calcetines sin mirar. ¿Qué probabilidad tengo de haber cogido 2 del mismo color?*

  Cogeré 2 del mismo color siempre que no coja los 3 de colores diferentes.

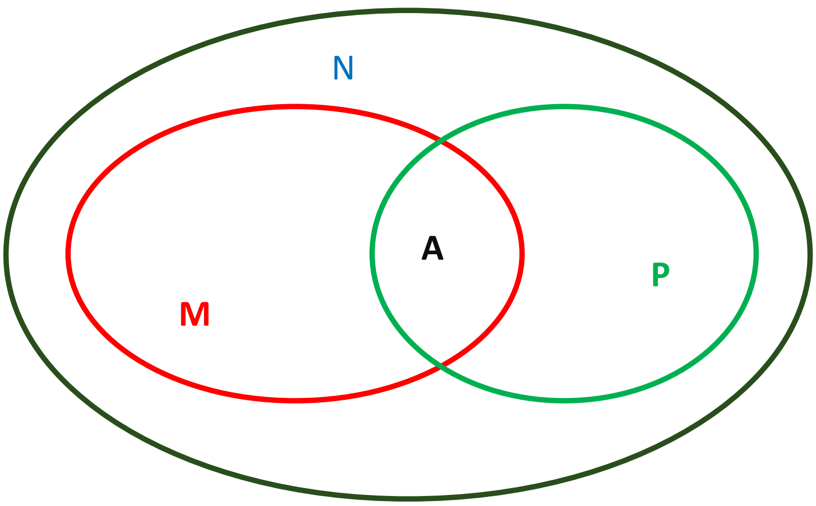
  Me da igual el color del primero que saco. Para el segundo me sirven 2 de entre 5. Y en la tercera extracción, como necesito un color diferente, me sirven 2 de entre 4.

  Así la probabilidad del suceso contrario es $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{5}$.

  Por ello la probabilidad pedida es $\frac{4}{5}$.

- *Se hace un estudio de consumo en una población. Se descubre que al 80 % de las personas a las que les gusta el helado de pistacho también les gusta el de mango y que al 80 % de las personas a las que les gusta el helado de mango también les gusta el de pistacho. Al 60 % de esa población no le gustan los helados de mango ni de pistacho. Se elige al azar una persona de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que le guste tanto el helado de mango como el de pistacho?*

  Vamos a calcular los porcentajes de la población a la que le gusta el helado de mango y de pistacho. Representaremos todos los datos con diagramas de Venn.



Consideremos

M = Porcentaje de personas a las que les gusta el helado de mango

P = Porcentaje de personas a las que les gusta el helado de pistacho

A = Porcentaje de personas a las que les gustan ambos helados (pistacho y mango)

N = Porcentaje de personas a las que no les gusta ni el helado de pistacho ni el de mango

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

Sabemos que A = 0,8 · P y también que A = 0,8 · M. Por tanto, M = P.

Ahora podemos referir todo a X, el número total de individuos de la población.

El número de personas al que les gusta al menos uno de esos tipos de helado es:

$$M + P - A = 2M - 0{,}8M = 1{,}2M$$

Pero sabemos que eso coincide con el 60 % de la población. Así 1,2M = 0,4$X \Rightarrow$ M = $\frac{4}{5}X$

Y, finalmente, $A = 0{,}8 \cdot \frac{1}{3}X = \frac{4}{15}X$.

Con lo que la probabilidad de que a la persona elegida al azar no le guste ni el helado de pistacho ni el de mango es:

$$P = \frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles} = \frac{\frac{4}{15}X}{X} = \frac{4}{15}.$$

- *En la lotería primitiva se apuestan* 6 *números de entre* 49. *Jugando una sola apuesta, ¿cuál es la probabilidad de que te toque un premio de* 5 *aciertos más complementario?*

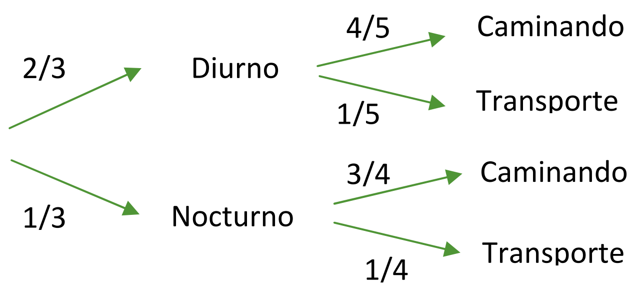
  El número de casos posibles son las combinaciones de 49 elementos tomados de 6 en 6: $C_{49,6}$.

  Los casos favorables tienen que incluir necesariamente al *número complementario*. Las otras 5 posiciones se tienen que llenar con 5 de los 6 elementos de la combinación ganadora. Así, el número de casos favorables viene dado por las combinaciones de 6 elementos tomados de 5 en 5: $C_{6,5}$.

  Así,

$$P(5 + complementario) = \frac{C_{6,5}}{C_{49,6}} = \frac{6}{13983816} = \frac{1}{2330636}.$$

- *En un IES hay Bachillerato diurno y Bachillerato nocturno. En diurno estudian* 2/3 *de los alumnos y el tercio restante lo hace en nocturno. La cuarta parte de los alumnos de nocturno y la quinta de los de diurno utiliza un medio de transporte para ir al instituto. El resto llega caminando. Se elige al azar un estudiante de ese instituto. ¿Qué probabilidad hay de que vaya a clase andando?*



La probabilidad de que un alumno acuda a clase caminando es

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{47}{60}.$$

- *Tras volver de Dublín, en el monedero tenemos* 6 *monedas de euro procedentes de España y* 9 *de Irlanda. Tenemos que pagar* 3 *euros. ¿Qué probabilidad hay de que lo hagamos con monedas del mismo país?*

  Tenemos 6 monedas de euro de España, 9 de Irlanda.

  Debemos tomar 3 monedas al azar.

  Los casos posibles son las combinaciones de 15 elementos tomados de 3 en 3. $C_{15,3}=455$.

  Los casos favorables provienen de coger las 3 monedas españolas o las tres irlandesas. Así resulta:

  $$C_{6,3}+C_{9,3}=20+84=104.$$

  Por lo tanto, la probabilidad pedida es $\frac{104}{455}$.

- *Un tahúr juega con una baraja trucada de* 48 *cartas. Saca una carta, la mira, la vuelve a meter en la baraja y mezcla. Repite este procedimiento otras* 2 *veces más. La baraja está preparada de tal modo que el hecho de una de las tres cartas vistas sea una figura tiene una probabilidad de* 19/27 *¿Cuántas figuras tiene su baraja?*

  Llamaremos *x* al número de figuras que hay en la baraja trucada. La probabilidad de no obtener figura en la primera carta es $\frac{48-x}{48}$, la de no obtenerla en la segunda vuelve a ser la misma probabilidad y lo mismo con la tercera. Así la probabilidad de no obtener figura es $\left(\frac{48-x}{48}\right)^3$.

  Como *no obtener ninguna figura* es el suceso contrario de *obtener alguna figura*, su probabilidad es:

  P(*no obtener ninguna figura*) = 1 – *P*(*obtener figura*) = $1-\frac{19}{27}=\frac{8}{27}$.

  Así hemos llegado a la ecuación

  $$\left(\frac{48-x}{48}\right)^3=\frac{8}{27}=\frac{2^3}{3^3}$$

  De donde

  $$\frac{48-x}{48}=\frac{2}{3}$$

  Y, despejando en esa ecuación resulta *x* = 16.

Actividades propuestas

15. Una bolsa contiene 9 bolas rojas y 6 bolas negras. Se extrae al azar una de ellas y se sustituye por dos del otro color. Tras ello se extrae una segunda bola. ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea roja? ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea del mismo color que la primera?

16. En el comedor escolar la probabilidad de que no haya pasta una semana es 1/3; la probabilidad de que haya pollo es 3/5 y la probabilidad de que haya pasta y pollo es 4/7. Calcula la probabilidad de que no haya ni pasta ni pollo. Calcula la probabilidad de que no haya pollo sabiendo que ha habido pasta.

17. Tenemos en el bolsillo monedas procedentes de 3 países: españolas (60 %), francesas (30 %) y alemanas (el resto). El 30 % de las monedas españolas y el 20 % de las francesas son de 50 céntimos. También sabemos que del total de monedas, el 30 % son de 50 céntimos. Se extrae una moneda al azar. ¿Qué probabilidad hay de que sea una moneda francesa de 50 céntimos? ¿Qué probabilidad hay de que sea una moneda de 50 céntimos, sabiendo que es alemana?

18. En una clase hay 24 alumnos y 16 alumnas. Se forman equipos de trabajo de 5 personas. Calcula la probabilidad de formar un equipo en las siguientes condiciones:

a) todos los participantes son del mismo sexo.

b) en el equipo hay al menos 3 chicas.

c) en el equipo hay exactamente 3 chicas.

d) En el equipo hay 3 estudiantes de un sexo y 2 de otro.

3.2. Cosas sorprendentes

Llevamos todo el capítulo insistiendo en que no tenemos suficientemente desarrollado el sentido de la probabilidad. Es necesario educar la intuición en este sentido. Por eso hay hechos que siendo totalmente explicables desde las Matemáticas, nos siguen pareciendo paradójicos. Vamos a comentar brevemente tres ejemplos.

Actividades resueltas

- *Aunque parezca una casualidad, por tener el año 365 días, es muy probable que en tu clase haya 2 alumnos que celebren su cumpleaños el mismo día. ¿Lo has comprobado?*

La probabilidad de que eso ocurra en un grupo de 23 personas la probabilidad es 1/2. En un grupo de 30 personas la probabilidad es mayor de 0,7 y en un grupo de 40 personas es 0,89.

¿Cómo podemos calcularlo?

Más fácil que calcular la probabilidad de que haya una coincidencia es calcular la probabilidad del suceso contrario: que no haya coincidencias.

Supondremos en este ejemplo que hay la misma probabilidad de haber nacido en un día o en otro (aunque sepamos que, en realidad, no es así).

- Supongamos que tenemos 2 personas. La primera habrá nacido un día. Para que no coincida la fecha de nacimiento de la segunda tenemos 364 posibilidades de elección. Así la probabilidad de que no haya una coincidencia en un grupo de 2 personas es $\frac{364}{365}$.
- Si ahora tenemos 3 personas y no queremos que haya coincidencias, hay 364 posibilidades para

elegir la segunda persona y 363 para elegir la tercera. Así esta probabilidad es:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}$$

- Análogamente, la probabilidad de que en un grupo de 4 personas no haya coincidencias es:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}$$

- Siguiendo con este razonamiento, llegamos a que la probabilidad de que en un grupo de 23 personas no haya coincidencias es:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdots\frac{344}{365}\cdot\frac{343}{365}=0{,}4927.$$

22 factores

Así que, la de que haya coincidencias es 1 – 0,4927 = 0,5073, ¡mayor del 50 %!

Para los otros casos que hemos comentado, puedes hacer tú los cálculos. Son similares a los que acabamos de hacer.

Actividades resueltas

La Administración Pública acostumbra a sortear la letra del apellido por la que se comenzará un proceso. Puede ser el orden de actuación de los concursantes a una oposición, antaño para sortear excedentes de cupo del servicio militar, adjudicación de viviendas protegidas o para adjudicar plazas en un colegio.

A pesar de que los matemáticos insistimos en que esos sorteos no son justos, puesto que no tratan a todos los individuos por igual, la Administración los continúa realizando (e incluso llega a la testarudez defendiendo su ecuanimidad). Efectivamente, los casos del espacio muestral no son equiprobables.

Supongamos que entre las jugadoras de la Selección Femenina de Baloncesto, que ganó el Eurobasket 2013, se sortea cuál de ellas sube a recoger la copa, y se hace sorteando una de las 27 letras del alfabeto español.

Apellido	Letras con las que ganará
Aguilar	yza
Domínguez	bcd
Gil	efg
Lima	hijkl
Nicholls	mn
Ouviña	o
Palau	p
Queralt	r
Sancho	rs
Torrens	t
Valdemoro	uv
Xargay	x

Vemos que Cindy Lima tendría una probabilidad de 5/27 de subir a recoger la copa, frente a 1/27 de Ouviña, Palau, Queralt, Torrens o Xargay.

Tristemente este sistema se sigue utilizando. Incluso lo ha usado la Comunidad de Madrid para asignar plazas en colegios para el curso 2014/2015.

Actividad propuesta

19. Supón que se sortea ser delegado de tu clase por el método descrito antes. ¿Quién tendría más probabilidad de salir? ¿Hay alguien que no tendría ninguna posibilidad? Hazlo con una lista de tu

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

clase.

3.3. Cosas aún más sorprendentes

Actividad propuesta

20. Toma 2 cartulinas de colores, cada una de un color distinto (por ejemplo, roja y azul) y recorta en cada una de ellas 3 rectángulos del mismo tamaño. Pega esos rectángulos entre sí de modo que uno sea rojo-rojo, otro azul-azul y otro rojo-azul. Mete las 3 cartulinas así preparadas en un sobre y saca una al azar, con cuidado de no mostrar nada más que un lado. Pregunta a un compañero que "*adivine*" el color de la cara que está oculta. Repite el proceso con todos los compañeros. Escribe los resultados del experimento en una tabla como esta que copies en tu cuaderno:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Oculto																														
Apuesta																														
Sale																														
¿acierta?																														

¿Qué observas? ¿Es mejor decir que el color oculto es el mismo que el visible? ¿O es peor?

Ejemplos

1.- La paradoja de *Bertrand*.

En 1889 *Joseph Bertrand* propuso el siguiente experimento: tenemos tres cajas en las que hemos introducido en una, una moneda de plata y una bronce, en otra dos monedas de plata y en otra dos monedas de bronce. Las monedas de plata y bronce son indistinguibles al tacto. Se elige una caja al azar y se saca una moneda de una de ella. Se ve que la moneda es de plata. ¿De qué material crees que es la otra moneda de la caja, plata o bronce?

En principio pensamos que como vemos una moneda de plata, puede tratarse de la caja que contiene dos monedas de plata o la que tiene una de cada tipo. Por ello, nos inclinamos a pensar que la probabilidad de que la otra moneda sea de plata o de bronce es la misma: 1/2.

Si pensamos un poco más veremos que este problema es, en realidad, equivalente a la actividad propuesta con la que hemos comenzado esta sección. En lugar de tener cartulinas con colores diferentes tenemos cajas con monedas de materiales diferentes. Las matemáticas del problema son las mismas en los dos casos. Así que, si has hecho la actividad anterior, ahora tendrás argumentos para decidir que lo más probable es que la otra moneda de la caja sea de plata.

En efecto, lo que se elige al azar es la caja. La probabilidad de haber elegido una caja con dos monedas iguales es 2/3, mientras que la probabilidad de elegir la caja que tiene una moneda de cada tipo es solamente 1/3. Por ello lo más probable es que hayamos elegido una caja con las dos monedas iguales. Como vemos que una es de plata lo mejor que podemos decir es que la otra también lo es.

Este es un ejemplo típico de probabilidad condicionada, aunque no lo parece.

2.- El problema de *Monty Hall*.

Monty Hall era el presentador del concurso de la televisión americana *Let's have a deal!* En ese concurso había un premio final donde se mostraban tres puertas. Detrás de una de ellas había un coche y en cada una de las otras dos había una cabra. Claro, los concursantes lo que querían era llevarse el coche.

Monty Hall procedía siempre del mismo modo:

- decía al concursante que eligiera una puerta: la A, la B o la C
- una vez elegida la puerta por el concursante abría una de las que no había elegido y mostraba que detrás de ella había una cabra
- le daba al concursante la oportunidad de cambiar su elección o mantenerse con lo que había elegido al principio

(Inciso antes de seguir leyendo: ¿tú qué harías?, ¿cambiarías?, ¿mantendrías tu elección?, ¿da igual?, ¿es mejor una cosa que la otra?)

Como enseña una puerta con una cabra, el coche está o en la que elige el concursante o en la otra, en principio al 50 %. En realidad la probabilidad no es del 50 %, como veremos ahora.

Marilyn vos Savant es una persona que presumía (y se ganaba la vida utilizándolo) de tener el record *Guinness* de cociente intelectual. Escribía una columna en la revista *Parade* y en ella dijo que la mejor estrategia era cambiar la elección después de que *Monty Hall* mostrase la cabra. Tras la publicación de esta columna numerosos matemáticos escribieron a la revista quejándose de semejante error. Para todos era obvio que la probabilidad de acierto, tanto si cambiaba la elección como si no lo hacía, era 1/2.

La polémica la zanjó *Paul Erdös* (un matemático húngaro un poco raro, que no tenía un domicilio fijo, ni un trabajo estable, pero que publicó un montón de resultados matemáticos) dando razón a vos *Savant*, para sorpresa de muchos. Sí, algunos matemáticos (incluso algunos importantes) se habían equivocado al calcular probabilidades. No pasa nada, todos cometemos errores.

Volvemos al problema. Vas a ver qué simple es el razonamiento. En realidad hay 3 casos: "eliges la puerta del coche" "eliges la de la cabra 1" o "eliges la de la cabra 2". Lo importante es que realizas esta elección ANTES de que *Monty Hall* te enseñe nada.

- Supongamos que has elegido la puerta con el coche. *Monty Hall* te enseñará la cabra 1 o la cabra 2. Si cambias pierdes. Si no cambias ganas.
- Supongamos que eliges la puerta con la cabra 1. *Monty Hall* te enseñará la cabra 2. Si cambias ganas: solo queda la puerta que oculta al coche. Si no cambias pierdes.
- Supongamos que eliges la puerta con la cabra 2. *Monty Hall* te enseñará la cabra 1. Si cambias ganas: solo queda la puerta que oculta al coche. Si no cambias pierdes.

Así, cambiando tu elección después de que *Monty Hall* abra la puerta ganarás 2 de cada 3 veces. ¿Sorprendido?

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

CURIOSIDADES. REVISTA

Pascal y Fermat

Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1655) mantuvieron una interesante correspondencia durante el año 1654 que se podrían considerar el inicio de la Teoría de la Probabilidad a pesar de tratarse de problemas de juegos y apuestas. Son problemas propuestos por el Caballero de la Mérè que no era matemático.

Uno es éste:

Un jugador apuesta una bolsa de monedas a que saca al menos un 6 en 8 lanzamientos de un dado. Ha tirado ya el dado 3 veces sin sacar ningún 6, y decide dejar el juego, ¿qué parte de la bolsa le correspondería?

Tú sabes resolverlo. Haz un diagrama en árbol, y calcula en primer lugar la probabilidad que tiene el jugador de ganar y la de que tiene de perder en un principio.

Cada tirada es un suceso independiente (no depende de lo que se haya obtenido en las anteriores, así que según Fermat si el jugador renuncia a una jugada tiene derecho a 1/6 de la bolsa.

Si renuncia a 2 lanzamientos entonces debe ser indemnizado con 1/6 + 5/36.

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos en el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían en cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos. *Jaggers* consiguió quebrar a la banca en *Montecarlo* analizando las frecuencias relativas de cada número de la ruleta y observando que se había desgastado algo del mecanismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenían igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

Caballero de la Meré

Al *Caballero de la Meré* le gustaba jugar y era un gran jugador, por eso sabía que era favorable apostar, al tirar un dado "sacar al menos un 6 en 4 tiradas de un dado" y que no lo era al tirar dos dados el "sacar al menos un 6 doble en 24 jugadas".

Se ve que había jugado mucho para saber que las frecuencias relativas le decían que el primer suceso tenía una probabilidad superior a 0,5, y el segundo la tenía inferior. Pero no lo comprendía. No era matemático y sólo se sabía la regla de tres. ¡Esto no es una proporcionalidad! Dijo 6 : 4 = 36 : 24. Pero las frecuencias relativas le decían que no era así, por lo que escribió a Pascal para que le solucionara el problema.

Tu ya sabes lo suficiente para solucionárselo. Antes de seguir leyendo, intenta resolverlo.

En lugar de calcular la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas, calcula la probabilidad de *no sacar un 6*, que es su suceso contrario, y es $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Por tanto la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas es:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,5177 > 0,5.$$

Calculamos del mismo modo la probabilidad de sacar *al menos un seis doble* al tirar dos dados 24 veces, calculando la de su suceso contrario, la de *no sacar ningún seis doble*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, por lo que sacar al menos un 6 doble es:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,4914 < 0,5.$$

¡Cuánto debió de jugar el Caballero de la Meré para darse cuenta de esa pequeña diferencia en las probabilidades!

Si quieres saber más, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

El inicio de la Teoría de la Probabilidad, como sabes, fueron los juegos de azar.

Galileo,

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216.

- Calcula las probabilidades de cada una de las sumas y la de sacar 10 y de sacar 9.

Autor: Fernando Blasco

Revisora: Raquel Caro

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

RESUMEN

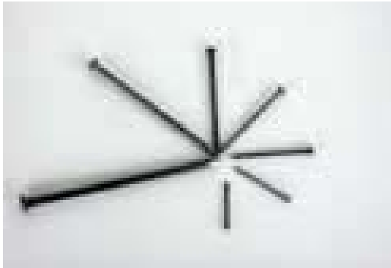
		Ejemplos
Experimento aleatorio	El resultado depende del azar	Tirar una moneda, o un dado
Suceso elemental	Cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio	Cara o cruz serían sucesos elementales en el experimento “tirar una moneda y observar el resultado”
Espacio muestral	Conjunto de casos posibles	{cara, cruz} {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Suceso	Subconjunto del espacio muestral	{2, 4, 6}
Ley de *Laplace*	Si los sucesos elementales son equiprobables entonces $P(S)=\frac{\text{número de casos favorables al suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$	Al tirar un dado: *P*(sacar 3) = 1/6 P(sacar múltiplo 2) = 3/6.
Combinatoria	Utiliza la combinatoria (combinaciones, variaciones, variaciones con repetición…) para contar bien los casos favorables y los posibles	La probabilidad de tener póker en una baraja francesa es: $P(poker)=\frac{13\cdot 12}{C_{52,2}}$
Diagrama en árbol	Problemas muy difíciles puedes resolver representando un diagrama en árbol	
Suceso contrario	El suceso contrario de S (S^c) se verifica si no se verifica S. $P(S^C) = 1 – P(S)$	Suceso contrario de sacar par es {1, 3, 5} = 1 – 3/6 = 1/2.
Sucesos independientes	Dos sucesos son independientes si la probabilidad de que se verifique uno queda afectada por que se haya verificado el otro.	La probabilidad del sacar un 3, al tirar un dado y volver a tirarlo.
Intersección de sucesos	Si A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. En general $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$	En una baraja española la probabilidad de sacar dos ases es (4/40) · (3/39)
Probabilidad condicionada	$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$	Probabilidad de sacar un as habiendo ya sacado otro as sin reemplazamiento es 3/39
Unión de sucesos	Si A y B son incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ En general $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$	En una baraja española la probabilidad de sacar un as o bien un oro es (4/40) + (10/49) – (1/40) = 13/40

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. En una clase hay 15 chicos y 18 chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado se hace un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase haya delegada?

2. En el monedero tenemos 8 monedas de 1 céntimo, 3 monedas de 5 céntimos, 8 monedas de 10 céntimos y 5 monedas de 50 céntimos. Sacamos una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad obtenida sea un número par de céntimos?



3. En una caja tenemos mezclados 50 clavos de 2 cm de largo, 30 clavos de 3 cm, 35 clavos de 2,5 cm y 60 clavos de 3,5 cm. Sacamos al azar un clavo de la caja (se asume que todos los clavos tienen la misma probabilidad de ser elegidos). ¿Qué probabilidad hay de que el clavo extraído tenga la menor longitud?

4. En un instituto de mil estudiantes hay 700 que hablan inglés, 400 que hablan francés, 50 que hablan alemán, 200 que hablan inglés y francés, 30 que hablan inglés y alemán, 10 que hablan francés y alemán y 5 que hablan los tres idiomas. Se elige un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que hable solamente una lengua extranjera?

5. La ruleta francesa consta de los números que van del 0 al 36. Si sale 0 gana la banca. Decidimos apostar a "*par*" (ganaremos si sale un número par no nulo). ¿Qué probabilidad tenemos de ganar la apuesta? ¿Y si apostamos a 7? ¿Y si apostamos a un número impar?

6. Una bolsa contiene 7 bolas blancas, 5 bolas rojas y 3 bolas negras. Se extraen dos bolas al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que sean una blanca y una negra?

7. Una bolsa contiene 10 bolas blancas, 9 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que tras la segunda extracción tengamos una bola blanca y una bola negra?

8. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra?

9. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra?

10. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido la bola negra?

11. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido una bola blanca?

12. En la lotería primitiva una apuesta consiste en marcar 6 casillas de entre 49 posibles. El día del sorteo se extraen 6 bolas (de entre 49). ¿Cuál es la probabilidad de que tu apuesta coincida con la combinación ganadora? ¿Cuál es la probabilidad de que aciertes un número? ¿Y la de que aciertes 2 números?

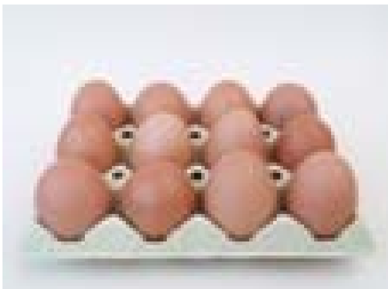
13. Se reparten al azar 5 cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que tengas 4 cartas

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

del mismo número?

14. En una jugada se reparten 5 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de conseguir tres ases y dos reyes? ¿Cuál es la probabilidad de tener tres cartas iguales? ¿Y una pareja? ¿Y de tener tres cartas iguales y las otras dos también iguales entre sí?
15. En una jugada se reparten 5 cartas. Se llama *escalera de color* a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo ordenadas consecutivamente. Calcula la probabilidad de obtener esta escalera de color de tréboles.
16. En una jugada se reparten 5 cartas. Se llama *color* a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo que no son consecutivas. Calcula la probabilidad de obtener *color* de tréboles.
17. Considera el experimento aleatorio "mezclar una baraja, cortar y mirar el color de las dos cartas que han quedado arriba". ¿Cuál es la probabilidad de que ambas tengan el mismo color?
18. Tenemos una caja con 12 bolas rojas y 8 bolas blancas. Se saca una bola al azar. Si es blanca se vuelve a meter en la caja. Si es roja se deja fuera. En estas condiciones se saca otra bola de la caja. ¿Qué probabilidad hay de que esta bola sea roja?

19. En un cajón tenemos 10 calcetines: 6 negros y 4 blancos. Sacamos, sin mirar, dos calcetines del cajón. ¿Qué es más probable, que sean ambos del mismo color o que sean de colores distintos?
20. Elabora un árbol de probabilidades para calcular la probabilidad de obtener *doble pareja* de ases y treses en una jugada de 5 cartas de póker. (*Doble pareja* consiste en 2 pares de cartas del mismo valor, diferentes entre sí, y una carta indiferente, de valor distinto a los dos anteriores. Por ejemplo, AA 33 Q).
21. En el monedero tengo 7 monedas de un céntimo, 4 de 5 céntimos, 6 de 10 céntimos, 5 de 20 y 7 de 50 céntimos. Saco 3 monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un número impar de céntimos?
22. El 60 % de una determinada población fuma, y el 12 % fuma y es hipertenso. Utiliza estas frecuencias para obtener probabilidades y determina si ser hipertenso es dependiente o independiente de fumar. ¿Cuál es la probabilidad condicionada de que una persona fumadora sea hipertensa?
23. Un analista deportivo, que se equivoca el 10 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito va a ganar la liga. El analista de la competencia, que se equivoca el 20 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito no va a ganar la liga. A tenor de dichos análisis. ¿Qué probabilidad hay de que nuestro equipo gane la liga?



24. Una compañía de productos avícolas empaqueta docenas de huevos en tres lugares diferentes. El 60 % de la producción tiene lugar en la planta A, el 30 % en B y el resto en C. Un control de calidad nos dice que un 5 % de los paquetes elaborados en A, un 7 % de los de B y un 10 % de los de C contienen algún huevo roto. ¿Qué probabilidad hay de que nos toque una docena de huevos con algún huevo roto?
25. En un cajón tengo un par de calcetines rojos, un par de calcetines negros y un par de calcetines

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

blancos. Al hacer la maleta, con las prisas, cojo 3 calcetines sin mirar. ¿Qué probabilidad tengo de haber cogido 2 del mismo color?

26. Se hace un estudio de consumo en una población. Se descubre que al 70 % de las personas a las que les gusta la mermelada de naranja también les gusta la de grosella y que al 80 % de las personas a las que les gusta la mermelada de grosella también les gusta la de naranja. Al 40 % de esa población no le gustan ni la mermelada de naranja ni la de grosella. Se elige al azar una persona de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que le guste tanto ambas mermeladas?

27. En la lotería primitiva se apuestan 6 números de entre 49. Jugando a dos apuestas, ¿cuál es la probabilidad de que te toque un premio de 5 aciertos más complementario?

28. En un instituto hay Bachillerato y Formación Profesional. En Bachillerato estudian 1/3 de los estudiantes y el resto lo hace en Formación Profesional. La cuarta parte de los estudiantes de Bachillerato y la sesta parte de los Formación Profesional utiliza un medio de transporte para ir al instituto. El resto llega caminando. Se elige al azar un estudiante de ese instituto. ¿Qué probabilidad hay de que vaya a clase utilizando un medio de transporte?

29. Un tahúr juega con una baraja trucada de 40 cartas. Saca una carta, la mira, la vuelve a meter en la baraja y mezcla. Repite este procedimiento otras 2 veces más. La baraja está preparada de tal modo que el hecho de una de las tres cartas vistas sea una figura tiene una probabilidad de 19/27 ¿Cuántas figuras tiene su baraja?

30. Una bolsa contiene 10 bolas rojas y 5 bolas negras. Se extrae al azar una de ellas y se sustituye por dos del otro color. Tras ello se extrae una segunda bola. ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea negra? ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea del mismo color que la primera?

31. En el comedor escolar la probabilidad de que no haya patatas una semana es 1/5; la probabilidad de que haya pescado es 2/5 y la probabilidad de que haya patatas y pescado es 1/10. Calcula la probabilidad de que no haya ni patatas ni pescado. Calcula la probabilidad de que no haya pescado sabiendo que ha habido patatas.

32. En una clase hay 20 alumnos y 10 alumnas. Se forman equipos de trabajo de 6 personas. Calcula la probabilidad de formar un equipo: a) con todo chicas, b) con 3 chicas, c) con todo chicos, d) con al menos 3 chicas.

33. Aunque parezca una casualidad, por tener el año 365 días, es muy probable que en una clase de 35 alumnos haya dos que celebren su cumpleaños el mismo día. Calcula dicha probabilidad. Lo mismo si la clase tiene 20 estudiantes.

34. Utiliza la tabla para obtener una tabla de contingencia sobre los accidentes de tráfico:

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

	En carretera (C)	En zona urbana (U)	Total
Con víctimas (V)	34092	32295	66387
Sólo daños materiales (D)	11712	20791	32503
Total	45804	53086	98890

Calcula P(V); P(D); P(C); P(U); P(V $\cap$ C); P(D $\cap$ U); P(U/V); P(V/U); P(V/C); P(C/V); P(C/D). Se sabe que ha habido un accidente en carretera, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido víctimas? ¿Son independientes los sucesos de accidente con víctimas y accidente en carretera?

35. Se realizan estudios sobre una determinada enfermedad y se conoce que la probabilidad de que una persona la tenga es de 0,04. Una determinada prueba detecta si una persona está enferma con una probabilidad de 0,97, pero también califica como enferma, en ocasiones, a una persona sana con una probabilidad de 0,01. Representa esta situación en un diagrama en árbol. Construye la tabla de contingencia asociada. Calcula la probabilidad de que una persona sana sea detectada como enferma.

36. En el control de calidad de un proceso de fabricación se sabe que la probabilidad de que un circuito sea defectuoso es 0,02. Un dispositivo para detectar los defectuosos tiene una probabilidad de detectarlos de 0,9, pero también califica como defectuosos a 0,03 de los correctos. Representa esta situación en un diagrama en árbol. Construye la tabla de contingencia asociada. Calcula la probabilidad de que un circuito defectuoso sea calificado como correcto.

37. En una clase hay 25 alumnas y 15 alumnos, y se sabe que el 80 % de las alumnas aprueban las matemáticas mientras que las aprueban el 60 % de los alumnos. Utiliza estos porcentajes para asignar probabilidades y calcula la probabilidad que hay al elegir una persona de la clase al azar de que:

a) Sea alumna y apruebe las matemáticas;

b) Sea alumna o apruebe las matemáticas;

c) Sea alumno y suspenda matemáticas;

d) Haya aprobado las matemáticas.

38. Se estudian las familias de tres hijos. Para simplificar hacemos la hipótesis de que la probabilidad de chico sea igual a la de chica. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) A = El primer hijo es chica.

b) B = Al menos hay un varón.

c) A $\cup$ B,

d) A $\cap$ B.

39. En una bolsa hay 3 bolas verdes, 4 bolas rojas y una bola blanca. Sacamos dos bolas de la bolsa. Calcula la probabilidad de los sucesos: A = "alguna de las bolas es verde", B = "ha salido la bola blanca". Calcula también: P(A^c), P(B^c), P(A $\cup$ B) y P($A^c \cap$ B). ¿Son A y B sucesos incompatibles? ¿Son sucesos independientes?

40. Dados los sucesos A y B de probabilidades: P(A^c) = 3/5; P(A $\cap$ B) = 1/8; P(B $\cup$ A) = 3/4; calcula las siguientes probabilidades: P(A); P(B); P(B^c); P(B/A^c); P($A^c \cap B^c$); P(A/B). ¿Son A y B sucesos independientes?

41. Determina si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B tales que:

a) $P(A) = 1/7$; $P(B) = 3/7$; $P(B \cup A) = 4/7$;
b) $P(A) = 1/5$; $P(B) = 0$;

42. Dados los sucesos A y B de probabilidades: $P(A^c) = 2/5$; $P(B) = 3/5$; $P(A^c \cap B^c) = 1/5$; calcula las siguientes probabilidades: $P(A)$; $P(B^c)$; $P(B \cup A)$; $P(B/A^c)$; $P(A \cap B)$; $P(A/B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

43. Dos tiradores al plato tienen unas marcas ya conocidas. El primero acierta con una probabilidad de 0,8 y el segundo de 0,6. Se lanza un plato y ambos disparan. Expresa mediante un diagrama de árbol y la tabla de contingencia asociada las distintas posibilidades. Calcula: a) ¿Qué probabilidad hay de que al menos uno de los tiradores dé en el plato? b) ¿Probabilidad de que ninguno acierte? c) Sabemos que el disparo ha acertado en el blanco, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho el primer tirador?

44. Se dispone de dos urnas A y B. La urna A tiene 7 bolas verdes y 3 amarillas. La urna B tiene 5 bolas verdes y 7 amarillas. Se saca una bola al azar de una de las dos urnas, también al azar, y resulta ser amarilla. Calcula la probabilidad de que sea de la urna B. (*Ayuda*: Representa las posibilidades mediante un diagrama en árbol, escribe la tabla de contingencia asociada y el otro diagrama en árbol).

45. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un décimo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es 1/20. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.

a) Hallar la probabilidad de que no sea daltónico.
b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

46. En cierto instituto se ofrece informática y teatro como asignaturas optativas. El grupo A consta de 32 estudiantes y el B tiene 30 estudiantes. El 70 % del grupo A ha elegido teatro, así como el 40 % del grupo B y el 60 % del resto del grupo B ha elegido informática.

a) Si se pregunta a un estudiante elegido al azar, hallar la probabilidad de que haya elegido informática.
b) Si un estudiante ha elegido teatro, calcula la probabilidad de que pertenezca al grupo B.

47. En una baraja española de cuarenta cartas se han eliminado varias cartas. Se sabe que la probabilidad de extraer un as entre las que quedan 0,1, la probabilidad de que salga una copa es 0,07 y la probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0,8.

a) Hallar la probabilidad de que la carta extraída sea as o copa.
b) Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?

48. En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres, hay una epidemia. El 10 % de los hombres y el 5 % de las mujeres están enfermos. Se elige al azar un individuo. Calcular la probabilidad de:

a) que sea hombre.
b) que esté enfermo.
c) que sea hombre, sabiendo que está enfermo.

AUTOEVALUACIÓN

1. En una bolsa hay 6 bolas negras y 3 bolas blancas, la probabilidad de sacar una bola negra es:

a) 1/2 b) 2/3 c) 1/3 d) 5/9

2. Indica cuál de los siguientes experimentos no es un experimento aleatorio:

a) Tirar una tiza y anotar el número de trozos en que se rompe

b) Tirar un dado trucado y anotar el número de la cara superior

c) Cruzar una calle y estudiar si hay un atropello

d) Calcular el consumo de gasolina de un coche

3. El espacio muestral de tirar 3 monedas al aire y anotar si caen en cara (C) o en cruz (X) con sucesos elementales equiprobables es:

a) {CCC, CCX, CXX, XXX} b) {3C, 2C, 1C, 0C}

c) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX} d) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC}

4. El suceso contrario a sacar al menos una cara en el experimento anterior es:

a) {XXX} b) {CCC, CCX, CXX} c) {CXX, XCX, XXC } d) {CCC, CCX, CXC, XCC }

5. Indica cuál de los siguientes sucesos no son independientes:

a) Sacar un oro y sacar un rey con reemplazamiento

b) Tirar una moneda y sacar cara y volver a tirarla y volver a sacar cara

c) Tirar un dado y sacar 6 y volver a tirarlo y volver a sacar 6

d) Tirar un dado y sacar un múltiplo de 2, y sacar un 6

6. La probabilidad de no sacar un as en una baraja de póker es:

a) 4/56 b) 52/56 c) 36/40 d) 1 – 36/40

7. La probabilidad de que la suma de las caras superiores sea 7 del experimento tirar dos dados es:

a) 1/2 b) 7/36 c) 5/36 d) 2/3

8. En una bolsa hay 7 bolas rojas y 4 blancas. Ser saca una bola al azar y si es blanca se vuelve a meter en la bolsa, mientras que si es roja se deja fuera. Se saca otra bola de la bolsa, la probabilidad de que sea roja es:

a) 42/110 b) 28/121 c) 70/121 d) 411/605

9. En una bolsa hay 4 bolas rojas y 3 blancas. Sacamos sin mirar dos bolas. La probabilidad de que sean del mismo color es:

a) 1/7 b) 2/7 c) 3/7 d) 4/7

10. Al lanzar un dado ha salido un número par, La probabilidad de que sea un 6 es P(sacar 6/ a par):

a) 1/3 b) 1/6 c) 2/5 d) 3/6

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia