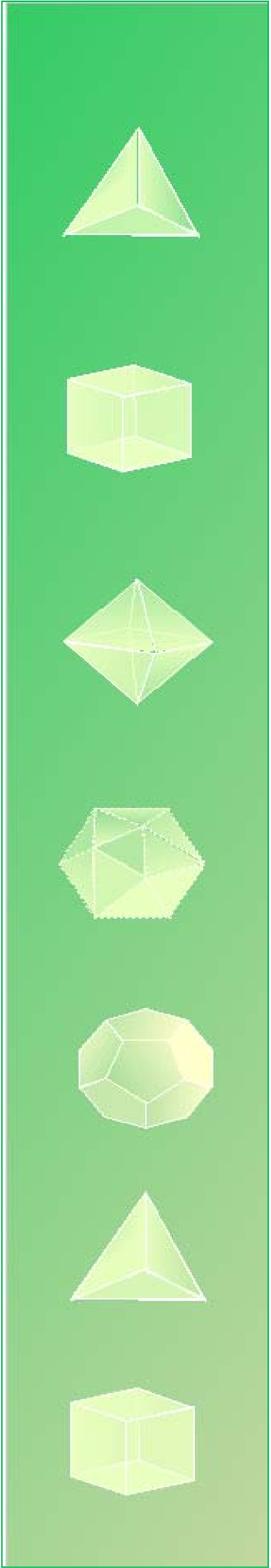


MATEMÁTICAS: 4ºB ESO
Capítulo 6: Semejanza

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz

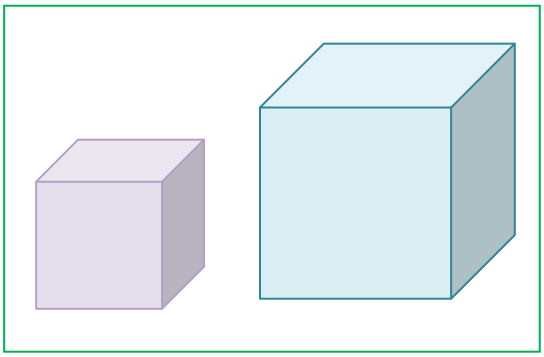
Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

Índice

Resumen

Uno de los problemas *históricos* de la Matemática es el de la **duplicación de un cubo**. En Atenas se desarrolló una tremenda peste que asolaba a la población. Incluso su gobernante, Pericles murió en el año 429 a. C. Consultado el oráculo de Apolo este dijo que se terminaría con la peste si se construía un altar que fuese doble del que había (que tenía forma de cubo).



No se logró dar con la solución. Se debe buscar la razón de proporcionalidad entre los lados para que el volumen sea doble. La peste se terminó, pero el problema se quedó sin resolver durante siglos, pero tú vas a saber solucionarlo cuando estudies este capítulo.

También vamos a estudiar el teorema de Tales y su aplicación a reconocer cuando dos triángulos son semejantes. Son los criterios de semejanza de triángulos.

Utilizando la semejanza de triángulos demostraremos dos teoremas, el teorema de la altura y el del cateto.

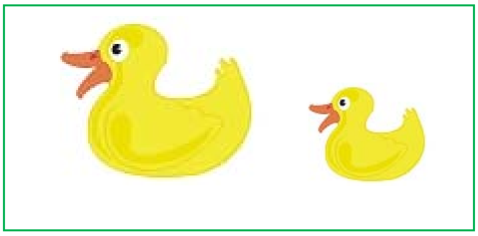
Autor: Jorge Muñoz

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

1. FIGURAS SEMEJANTES

1.1. Figuras semejantes



Durante este capítulo hablaremos únicamente de la proporcionalidad geométrica, la semejanza.

Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*. Es muy útil saber reconocer la semejanza para poder estudiar una figura e inferir así propiedades de una figura semejante a ella que es más grande o inaccesible. La semejanza conserva los ángulos y mantiene la proporción entre las distancias.

Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.

1.2. Razón de semejanza. Escala.

Dos figuras son **semejantes** si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales. Al coeficiente de proporcionalidad se le llama **razón de semejanza**. Cuando representamos algo mediante una figura (3D) o un plano (2D) la razón de semejanza también se la llama **escala**.

En el lenguaje matemático existen dos herramientas fundamentales para describir una proporción: El producto y el cociente.

El producto indica cuántas veces mayor es la representación frente al modelo. Se suele denotar mediante el signo de producto **"X"** (10X, 100X, etc.) indicando así la razón de semejanza.

Ejemplo:

- *Una representación a escala* 100X de una célula, indica que la representación es 100 veces más grande que el modelo, o que 100 células en fila tienen la misma longitud que la representación.

La división indica el camino contrario, o cuánto más pequeño es el modelo frente a su representación. Se suele denotar mediante el símbolo de división **":"** (1:100, 1:500, etc.) lo que indica la razón de semejanza.

Ejemplo:

- *Un plano de construcción de un edificio de escala* 1:100, indica que la representación es 100 veces más pequeña que el modelo. Si una distancia en el plano es 10 cm, esa misma distancia en la realidad será de 10 m.

Para escribir una **razón de semejanza** en lenguaje algebraico se utilizan dos operadores: el producto (x) y el cociente (:).

Cuando hablamos de semejanza geométrica, nos referimos a proporcionalidad en cuanto a longitudes, pero también hay otros atributos en los que podemos encontrar semejanzas entre un modelo y un semejante. En general, cualquier magnitud que sea medible tanto en el modelo como en su semejante, es apta para establecer una relación de semejanza.

Siempre que se puedan comparar dos magnitudes de un atributo común, es posible establecer una **razón de semejanza**.

Actividades resueltas

- *Si un microscopio tiene un aumento de* 100X, ¿qué tamaño (aparente) piensas que tendrá la imagen que se vea por el objetivo si observamos un pelo de 0,1 mm de espesor?

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

0,1 mm X 100 = 10 mm = 1 cm.

- *Averigua la altura de una casa que mide* 20 cm de alto en un plano de escala 1:100.

Si H es la altura de la casa y h el tamaño en el plano, sabemos que $h = H/100$, por lo tanto, $H = 100 \cdot h$.
$H = 100 \cdot 20$ cm = 20 m. *Comprobación*: Es una casa de unos 7 pisos.

Actividades propuestas

1. Mide tu altura en una foto y calcula el factor de semejanza.

1.3. Semejanza en longitudes, áreas y volúmenes

Longitud de figuras semejantes

En las figuras semejantes la forma no varía, únicamente cambia el tamaño. Las longitudes son proporcionales. En el siguiente apartado demostraremos el teorema de Tales que es el fundamento matemático de la semejanza.

La **razón de semejanza** se aplica a todas las **longitudes** del modelo por igual.

Cuando las propiedades de una figura dependen de la longitud, como el área y el volumen, estas propiedades también cambian en la figura semejante, aunque no de la misma manera que la longitud.

Ejemplo:

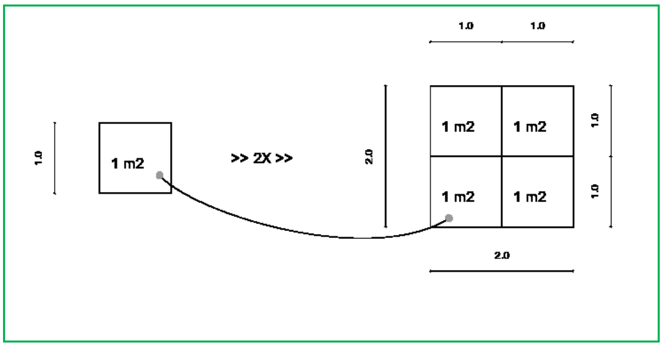
- *Si el área del cuadrado es* $A = L^2 = L \cdot L$*, el área de un cuadrado semejante de razón* 2*, será:*

  $A = 2 \cdot L \cdot 2 \cdot L = 2 \cdot 2 \cdot L \cdot L = 2^2 \cdot L^2 = 4 \cdot L^2$

Áreas de figuras semejantes

El área de una figura es una propiedad que depende de la longitud de sus segmentos. En concreto, la relación entre la longitud de una figura y su área es cuadrática.

Cuando se aplica el factor de semejanza, se conserva la relación cuadrática entre longitud y área, por lo que en una figura plana (2D), provocará un aumento de su área proporcional al cuadrado.



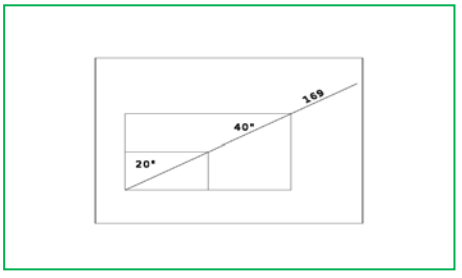
Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, la relación entre sus áreas, A y A' es:

$A' = k \cdot L_1 \cdot k \cdot L_2 = k \cdot k \cdot L_1 \cdot L_2 = k^2 \cdot A$

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, entonces la razón entre sus áreas es $\boldsymbol{k^2}$.

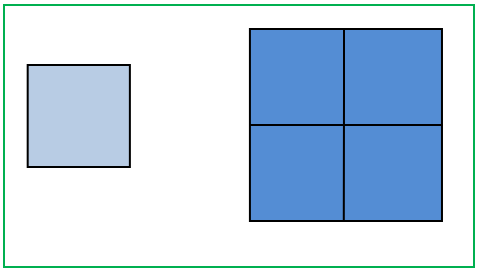
Ejemplo:

- *Un televisor de* 40 *pulgadas cuesta aproximadamente cuatro veces más que uno de* 20. Por extraño que parezca, el aumento de precio está justificado. El tamaño del televisor, indica la longitud de su diagonal en pulgadas. Una longitud doble, implica un área cuatro veces mayor y por tanto necesita cuatro veces más componentes electrónicos.



Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

Ejemplo:



- *Observa la figura del margen.* Si multiplicamos por 2 el lado del cuadrado pequeño, el área del cuadrado grande es 2^2 = 4 veces la del pequeño.

Volúmenes de figuras semejantes

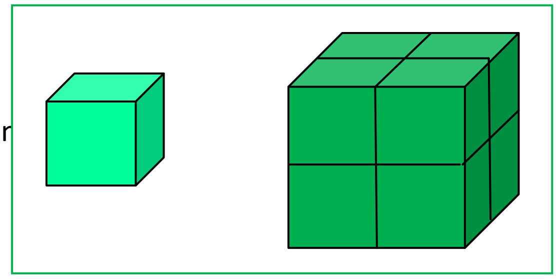
El volumen de una figura es una propiedad que depende de la longitud de sus segmentos. En este caso, la relación entre las longitudes de una figura y su volumen es cúbica.

Cuando se aplica el factor de semejanza, esta relación cúbica provocará un aumento de su volumen proporcional al cubo (k^3). Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, y el volumen de partida es $V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$: al aplicar la semejanza se tiene:

$$V_k = k \cdot L_1 \cdot k \cdot L_2 \cdot k \cdot L_3 = \text{k·k·k} \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot V$$

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es $\boldsymbol{k}$, entonces entre sus volúmenes es $\boldsymbol{k^3}$.

Ejemplo:



- *Observa la figura del margen*. Al multiplicar por 2 el lado del cubo pequeño se obtiene el cubo grande. El volumen del cubo grande es 8 (2^3) veces el del cubo pequeño.

Actividades resueltas

- *La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?*

El peso está relacionado con el volumen. La torre Eiffel pesa 8 000 000 kilos, y queremos construir una, exactamente del mismo material que pese 1 kilo. Por tanto k^3 = 8000000/1 = 8 000 000, y k = 200. La razón de proporcionalidad entre las longitudes es de 200.

Si la Torre Eiffel mide 300 *m* de altura (mide un poco más, 320 m), y llamamos x a lo que mide la nuestra tenemos: 300/x = 200. Despejamos x que resulta igual a x = 1,5 *m*. ¡Mide metro y medio! ¡Es mucho mayor que un lápiz!

Actividades propuestas

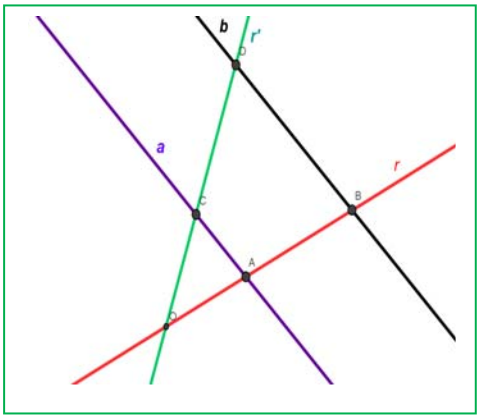
2. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 8 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?

3. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 3 €, 6 € y 9 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* y 30 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.

4. Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

2. EL TEOREMA DE TALES



2.1. Teorema de Tales

Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. La recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*. Entonces el Teorema de Tales afirma que los segmentos son proporcionales:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$$

Se dice que los triángulos *OAC* y *OBD* están en **posición *Tales***. Son **semejantes**. Tienen un ángulo común (coincidente) y los lados proporcionales.

Actividades resueltas

- *Sean OAC y OBD dos triángulos en posición Tales. El perímetro de OBD es* 20 *cm, y OA mide* 2 *cm, AC mide* 5 *cm y OC mide* 3 *cm. Calcula las longitudes de los lados de OBD.*

Utilizamos la expresión: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$ sustituyendo los datos:

$$\frac{2}{OB}=\frac{3}{OD}=\frac{5}{BD}=\frac{2+3+5}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2},$$

por lo que despejando, sabemos que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, y *BD* = 5·2 = 10 cm. En efecto: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetro del triángulo.

- *Cuenta la leyenda que Tales midió la altura de la pirámide de Keops comparando la sombra de la pirámide con la sombra de su bastón. Tenemos un bastón que mide* 1 *m, si la sombra de un árbol mide* 12 *m, y la del bastón, (a la misma hora del día y en el mismo momento), mide* 0,8 *m, ¿cuánto mide el árbol?*

Las alturas del árbol y del bastón son proporcionales a sus sombras, (forman triángulos en posición *Tales*), por lo que, si llamamos *x* a la altura del árbol podemos decir:

$\frac{0{,}8}{1}=\frac{12}{x}$. Por tanto *x* = 12/0,8 = 15 metros.

Actividades propuestas

5. En una foto hay un niño, que sabemos que mide 1,5 *m*, y un edificio. Medimos la altura del niño y del edificio en la foto, y resultan ser: 2 *cm* y 10 *cm*. ¿Qué altura tiene el edificio? *Comprobación*: ¿El resultado te parece real? ¿Es posible que un edificio tenga esa altura?

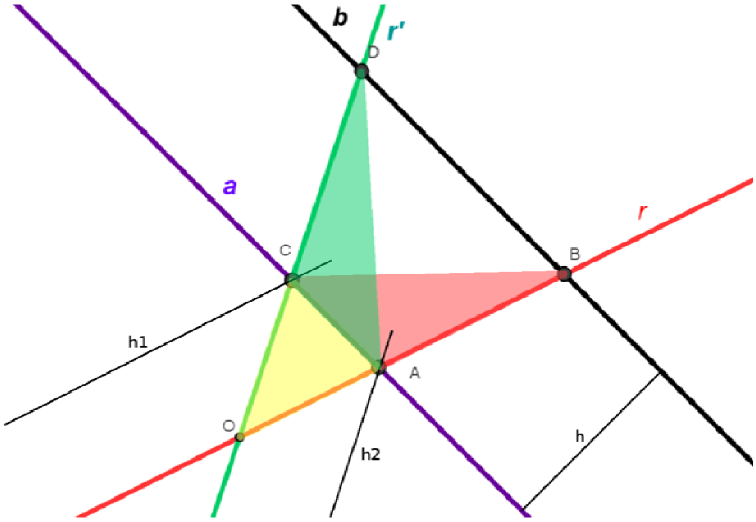
6. Se dibuja un hexágono regular. Se trazan sus diagonales y se obtiene otro hexágono regular. Indica la razón de semejanza entre los lados de ambos hexágonos.

7. En un triángulo regular *ABC* de lado 1 *cm*, trazamos los puntos medios, *M* y *N*, de dos de sus lados. Trazamos las rectas *BN* y *CM* que se cortan en un punto *O*. ¿Son semejantes los triángulos *MON* y *COB*? ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto mide el lado *MN*?

8. Una pirámide regular hexagonal, de lado de la base 3 *cm* y altura 10 *cm*, se corta por un plano a una distancia de 4 *cm* del vértice, con lo que se obtiene una nueva pirámide. ¿Cuánto miden sus dimensiones?

2.2. Demostración del teorema de Tales

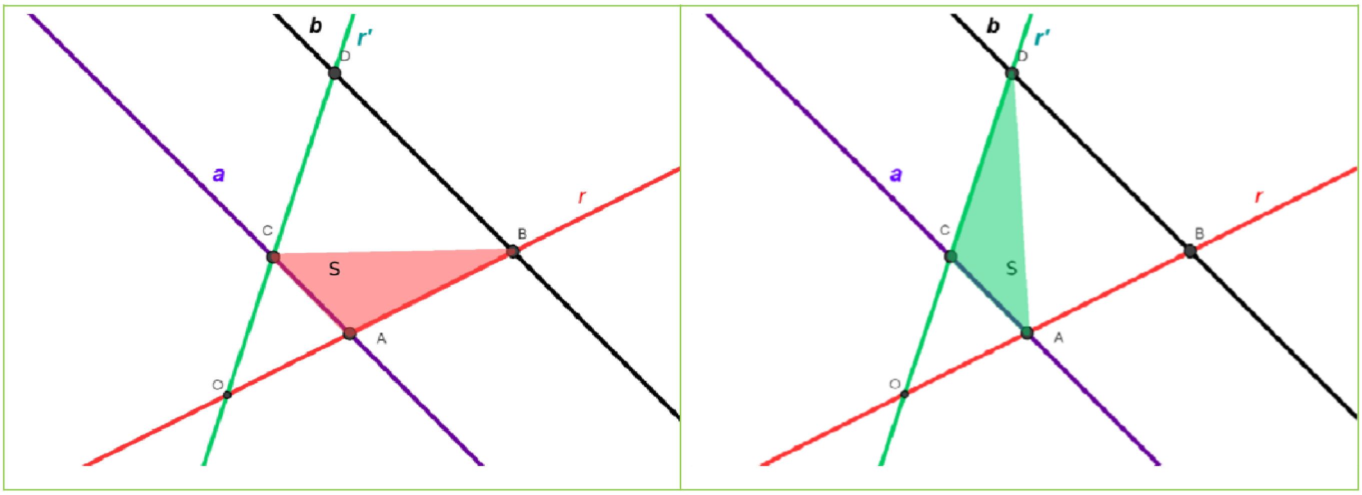
Para la demostración se utilizan los triángulos *ABC*, *ADC* y *OCA,* que se muestran en la figura.



Vamos a dar varios pasos para demostrar el teorema de Tales.

- El área del triángulo *ABC* es la misma que el área del triángulo *ADC* pues tienen la misma base, (*AC*), y la misma altura (*h*), la distancia entre las rectas paralelas ***a*** y ***b***:

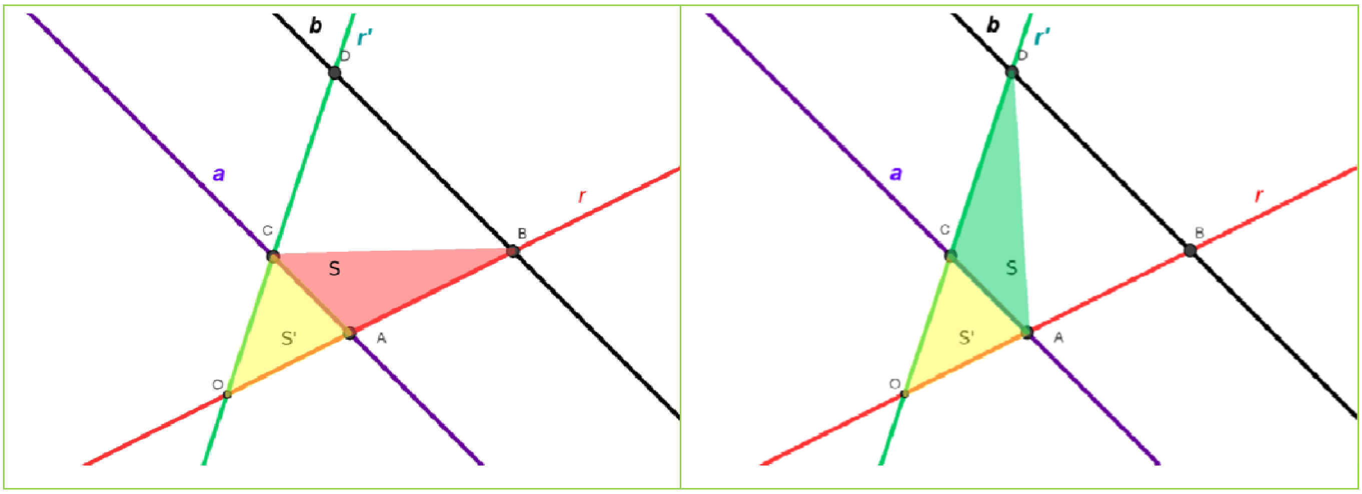
$$\text{Área } (ABC) = \text{Área } (ADC) = CA \cdot h/2 = S$$



Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

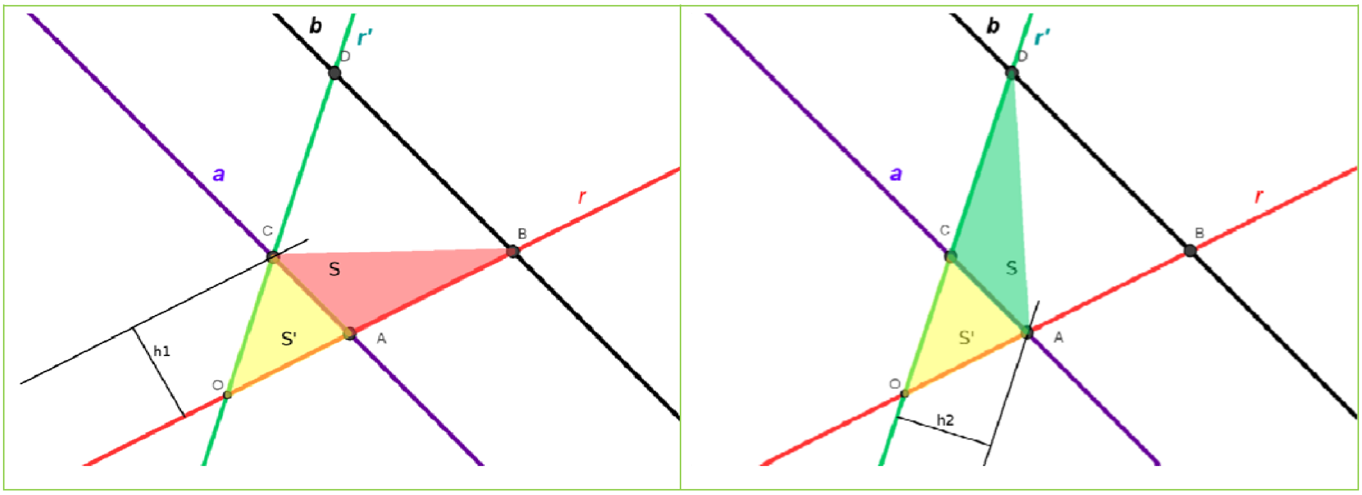
- El área del triángulo *OCB* es la misma que el área del triángulo *OAD* pues hemos sumado a las áreas de los triángulos anteriores, el área del triángulo *OAC*:

$$\text{Área } (OCB) = \text{Área } (OAD) = S + S'$$



- Calculamos el cociente entre las áreas de los triángulos *OAC* y *OBC*. Para calcular las áreas, tomamos las bases que están sobre la recta ***r***, entonces la altura de ambos triángulos es la misma pues tienen el vértice *C* común, por lo que el cociente entre sus áreas es igual al cociente entre sus bases.
- Del mismo modo calculamos el cociente entre las áreas de los triángulos *OAC* y *OAD* tomando ahora las bases sobre la recta ***r'*** y la altura, que es la misma, la del vértice común *A*:

$$\frac{\text{Área}(OAC)}{\text{Área}(OBC)} = \frac{S'}{S+S'} = \frac{OA \cdot h_1/2}{OB \cdot h_1/2} = \frac{OA}{OB} \qquad \frac{\text{Área}(OAC)}{\text{Área}(OAD)} = \frac{S'}{S+S'} = \frac{OC \cdot h_2/2}{OD \cdot h_2/2} = \frac{OC}{OD}$$



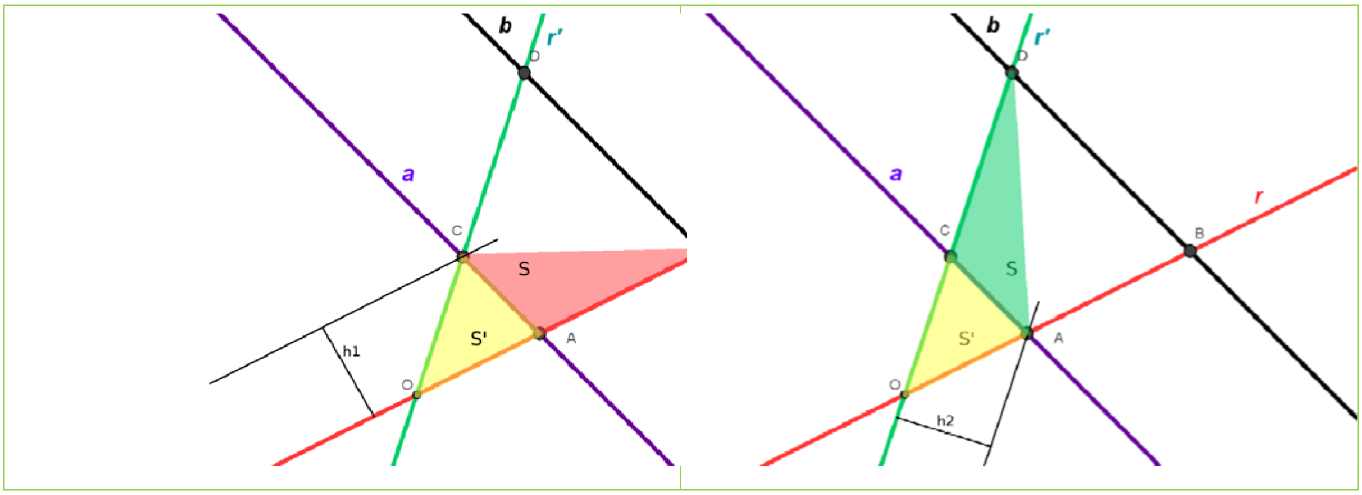
- Ya hemos demostrado que *Área* (*OBC*) = *Área* (*OAD*) = S, sustituyendo:

$$\frac{\text{Área}(OAC)}{\text{Área}(OBC)} = \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}. \qquad (1)$$

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

- Para obtener la otra relación de proporcionalidad utilizamos un razonamiento similar. Calculamos el cociente entre las áreas de los triángulos *OAC* y *ABC* tomando las bases sobre la recta ***r*** y la altura del vértice común *C*.
- Después calculamos el cociente entre las áreas de los triángulos *OAC* y *ADC* tomando las bases sobre la recta ***r'*** y la altura, que es la misma, desde el vértice común *A*, por lo que ese cociente es proporcional a las bases *OC* y *CD*:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(ABC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OA\cdot h_1/2}{AB\cdot h_1/2}=\frac{OA}{AB} \qquad \frac{Área(OAC)}{Área(ADC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OC\cdot h_2/2}{CD\cdot h_2/2}=\frac{OC}{CD}$$



- Pero como las áreas de *ABC* y de *ADC* (S) son iguales se obtiene:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(ABC)}=\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}\Rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}. \qquad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2) se consigue la primera afirmación del teorema de Tales:

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}\Leftrightarrow\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Actividades resueltas

- *Demuestra que si* $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$ *entonces* $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$

En efecto, si decimos que $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}=k$ obtenemos que:

$OA = k\cdot OC;\ OB = k\cdot OD;\ AB = k\cdot CD \quad => \quad OA + OB + AB = k\cdot OC + k\cdot OD + k\cdot CD = k\cdot(OC + OD + CD)$

Y despejando *k* hemos logrado probar que:

$$k=\frac{OA+OB+AB}{OC+OD+CD} \text{ y por tanto}$$

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}\text{, el teorema de Tales.}$$

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

- *Sean OAC y OBD dos triángulos en posición Tales. El perímetro de OAC es 50 cm, y OB mide 12 cm, BD mide 9 cm y OD mide 9 cm. Calcula las longitudes de los lados de OAC.*

Utilizamos la expresión del Teorema de Tales:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$$

sustituyendo los datos:

$$\frac{OA}{12}=\frac{OC}{9}=\frac{AC}{9}=\frac{50}{12+9+9}=\frac{50}{30}=\frac{5}{3},$$

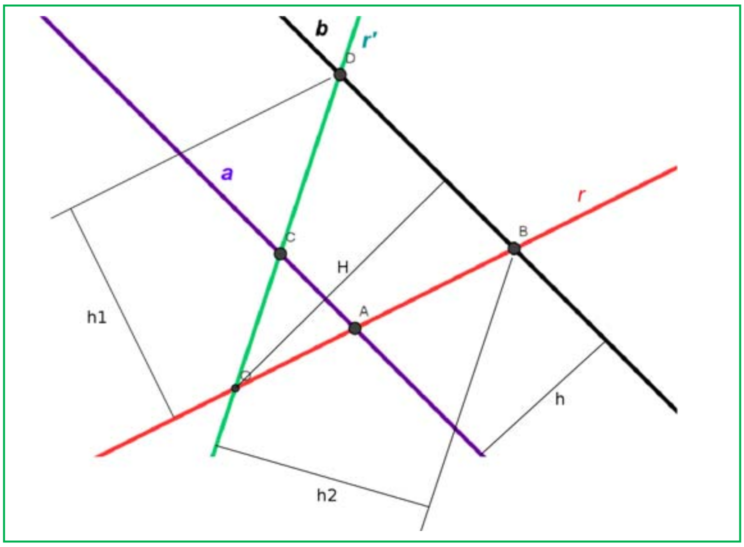
por lo que despejando, sabemos que:

$OA = 12\frac{5}{3} = 20$ cm;

$OD = 9\frac{5}{3} = 15$ cm, y

$BD = 9\frac{5}{3} = 15$ cm.

En efecto: 20 + 15 + 15 = 50 cm, perímetro del triángulo.



Actividades propuestas

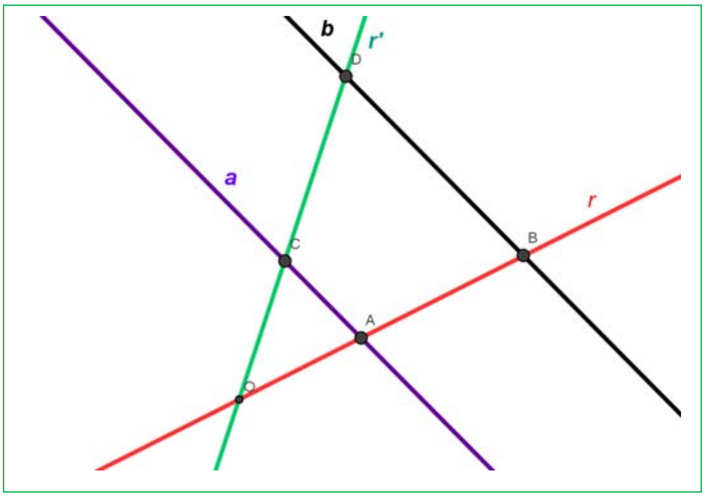
9. Sean *ABC* y *AED* dos triángulos en posición Tales. Se sabe que *AB* = 7 m, *BC* = 5 m, *AC* = 4 m y *AD* = 14 m. Calcula las dimensiones de *AED* y su perímetro.

10. *Reto*: Utiliza una hoja en blanco para demostrar el teorema de Tales sin ayuda. No hace falta que utilices el mismo procedimiento que el libro. Hay muchas maneras de demostrar el teorema.

2.3. Recíproco del teorema de Tales

Dadas dos rectas, ***r*** y ***r'***, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas ***a*** y ***b*** tales que la recta ***a*** corta a las rectas ***r*** y ***r'*** en los puntos *A* y *C*, y la recta ***b*** corta a las rectas ***r*** y ***r'*** en los puntos *B* y *D*. Entonces el recíproco del Teorema de Tales afirma que si todos los segmentos formados por los puntos *A, B, C* y *D* son proporcionales, entonces las rectas ***a*** y ***b*** son paralelas entre sí.

Si $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$ entonces ***a*** y ***b*** son paralelas.

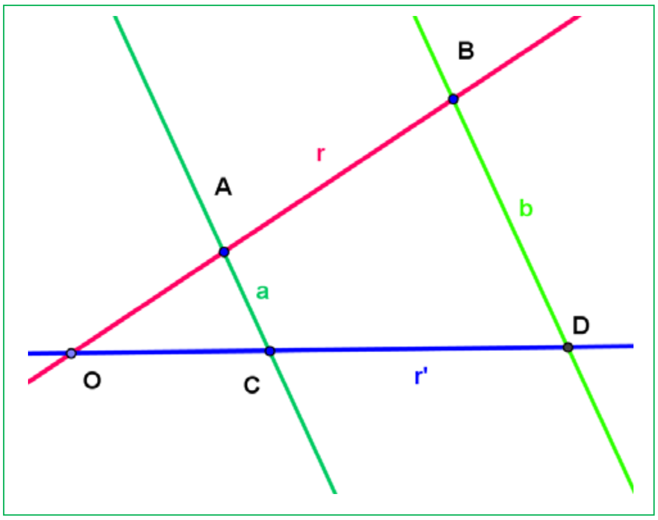


Autor: Jorge Muñoz

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

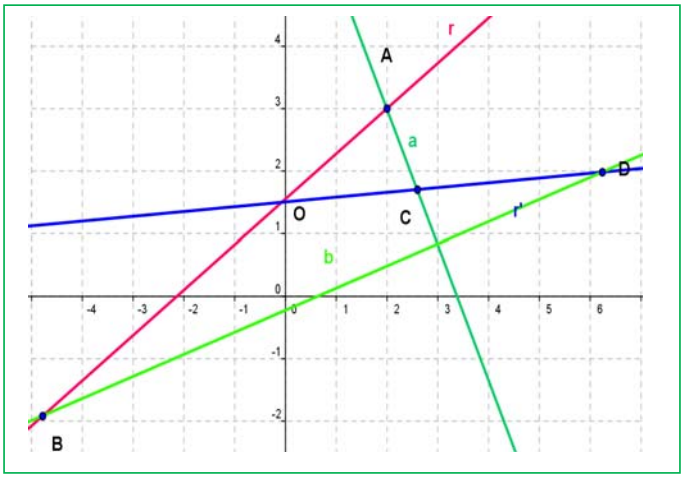
Actividades resueltas



- *En la figura adjunta se sabe que OA* = 2 cm, *OC* = 2 cm, AC = 1 cm, *OB* = 5 cm, *OD* = 5 cm, BD = 2'5 cm. ¿Cómo son las rectas ***a*** y ***b***?

Sustituimos en la expresión del teorema de Tales: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$, que se verifica ya que: $\frac{2}{5}=\frac{2}{5}=\frac{1}{2'5}$, luego las rectas ***a*** y ***b*** son paralelas, y el segmento *AC* es paralelo a *BD*.

- *En la figura adjunta se sabe que OA* = *OC* = 2 cm, y que *OB* = 5 cm = *OD*. Las rectas ***a*** y ***b*** no son paralelas, ¿por qué?



Porque no verifica el teorema de Tales.

$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}\neq\frac{AC}{BD}$ => $\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\neq\frac{AC}{BD}$.

No basta con que se verifique una de las igualdades, deben verificarse las dos.

Comprobación: Mide con una regla los valores de *AC* y *BD*.

Actividades propuestas

11. Sean *O*, *A* y *B* tres puntos alineados y sean *O*, *C*, *D* otros tres puntos alineados en una recta diferente a la anterior. Se verifica que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$. ¿Podemos asegurar que el segmento *AC* es paralelo al segmento *BD*? Razona la respuesta.

12. Sean *O*, *A* y *B* tres puntos alineados y sean *O*, *C*, *D* otros tres puntos alineados en una recta diferente a la anterior. Se verifica que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$. ¿Podemos asegurar que el segmento *AC* es paralelo al segmento *BD*? Razona la respuesta.

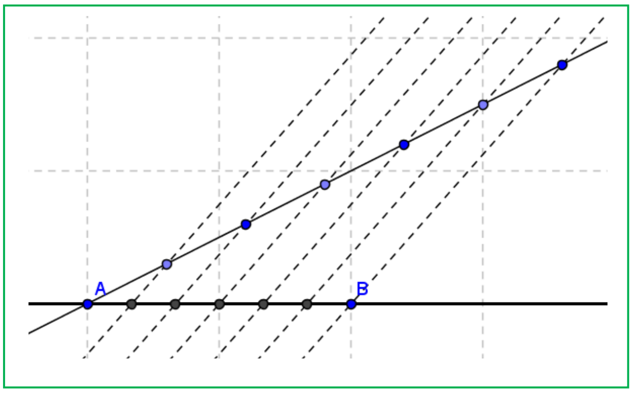
Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

2.4. Aplicaciones del teorema de Tales

Al estudiar la representación de números racionales en la recta numérica aprendimos a representar fracciones para lo que era necesario dividir segmentos en partes iguales.

Recuerda que:

Para dividir un **segmento *AB* en *n* partes iguales** se traza una semirrecta *r* con origen en *A* donde se señalan, con ayuda de un compás, *n* segmentos consecutivos de la misma longitud. El extremo del último segmento se une con *B*, y se trazan paralelas a este segmento por cada uno de los puntos señalados de la semirrecta.



Observa que la figura obtenida es de triángulos en posición Tales, y que los segmentos obtenidos en *AB* son todos de igual longitud.

Del mismo modo el teorema de Tales nos sirve para **dividir un segmento en partes que tengan una proporción dada**. El procedimiento es el mismo que el anterior. La diferencia es que ahora únicamente nos interesa una de las divisiones de la semirrecta *r*.

El teorema de Tales también nos permite conocer mucho más sobre la **semejanza de triángulos**. Si dos triángulos son semejantes vamos a poder aplicar un movimiento a uno de ellos (traslación, giro o simetría) y colocarlo en posición Tales con el segundo, y a partir de ahí utilizar el teorema de Tales. Esto lo veremos con más detenimiento en los apartados siguientes.

Actividades resueltas

- *En la figura anterior hemos dividido el segmento AB* en 6 partes iguales. Identifica los 6 triángulos en posición de Tales y calcula el factor de semejanza con respecto al primero.

Los triángulos en posición de Tales son los que comparten el mismo ángulo del vértice A.
Si llamamos *d* a la distancia entre dos cortes sobre el segmento *AB*, se puede calcular *d* = *AB*/6.
El factor de semejanza se calcula mediante la proporción entre sus longitudes. Al ser triángulos en posición Tales, sabemos que todas las proporciones son iguales para todos los lados, por lo que el factor de semejanza coincide con la proporción entre cualquier par de lados, incluyendo los que coinciden con el segmento *AB*.

Tenemos entonces que la base del primer triángulo (el más pequeño) es *d*, y la base del segundo triángulo es 2 · *d*, así que la razón de semejanza de estos dos triángulos es 2.
De la misma manera, las razones de semejanza de los demás triángulos serán 3, 4, 5 y 6.

Actividades propuestas

13. Busca otras relaciones de semejanza entre los triángulos de la actividad resuelta anterior. Por ejemplo el sexto triángulo es el doble que el tercero.

14. Dibuja en tu cuaderno un segmento y divídelo en 5 partes iguales utilizando regla y compás. Demuestra que, utilizando el teorema de Tales los segmentos obtenidos son, en efecto, iguales.

15. Dibuja en tu cuaderno un segmento de 7 cm de longitud, y divídelo en dos segmentos que estén en una proporción de 3/5.

16. Dibuja en tu cuaderno una recta numérica y representa en ella los siguientes fracciones:

a) 1/2 b) 5/7 c) –3/8 d) 5/3

3. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

3.1. Criterios de semejanza de triángulos

¿Cómo se sabe si dos figuras son semejantes?

Ya sabes que:

Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma pero distinto tamaño. Aunque esta definición puede parecer muy clara en lenguaje natural, no es útil en Matemáticas, ya que no se puede escribir en lenguaje lógico.

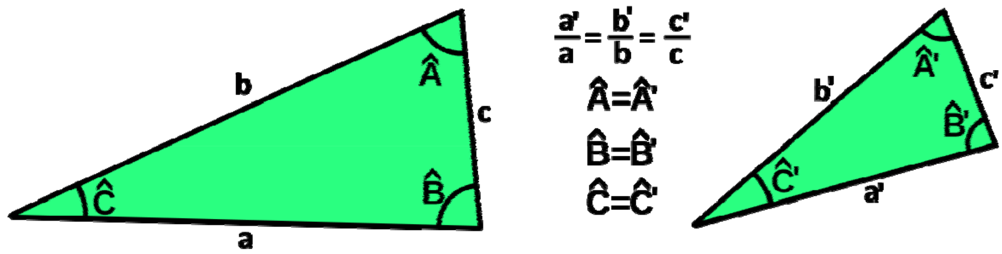
Vamos a trabajar la semejanza con la figura más simple que existe: el **triángulo**.

Las dos condiciones para la semejanza son la forma y el tamaño. Un triángulo es una figura formada por tres lados y tres ángulos.

Dos triángulos tienen la misma forma si los tres ángulos son iguales. Si un solo ángulo es distinto tienen distinta forma, y se trata de triángulos no semejantes.

Cuando dos triángulos tienen la misma forma, (los mismos ángulos), podemos hablar de triángulos semejantes. Si son semejantes, la proporción entre sus lados es constante, como afirma el teorema de Tales.

Dos triángulos **semejantes** tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.



Para reconocer dos triángulos semejantes no es necesario conocer todos los lados y ángulos, es suficiente con que se cumpla alguno de los siguientes **criterios de semejanza.**

Criterios de semejanza de triángulos

Para que dos triángulos sean semejantes, deben tener sus tres ángulos iguales. Esto se cumple en los siguientes tres casos.

Dos triángulos son semejantes sí:

Primero: Tienen dos ángulos iguales.

Al tener dos ángulos iguales y ser la suma de los ángulos de un triángulo igual a 180º, el tercer ángulo es necesariamente igual. Con lo que ambos triángulos se pueden superponer y llevar a la posición de triángulos en posición Tales. Dos de sus lados son entonces coincidentes y el tercero es paralelo.

Segundo: Tienen los tres lados proporcionales.

Si sus tres lados son proporcionales, necesariamente son semejantes por el teorema de Tales.

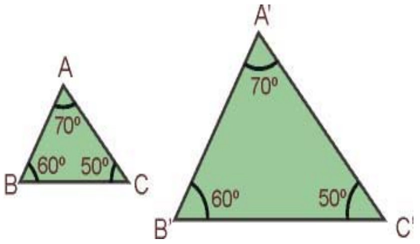
Tercero: Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

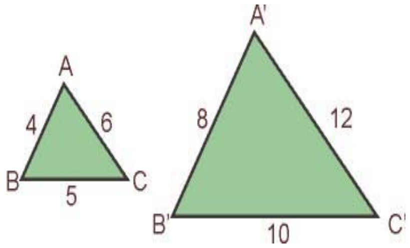
Como acabamos de ver, la demostración de los criterios de semejanza se basa en los criterios de igualdad de triángulos. Ya sabes que dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales, pero no es necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que lo sean. Basta por ejemplo que tengan un lado y dos ángulos iguales. Así, se puede construir un triángulo igual a uno de los dados en *posición Tales* con el segundo y deducir la semejanza.

Ejemplo

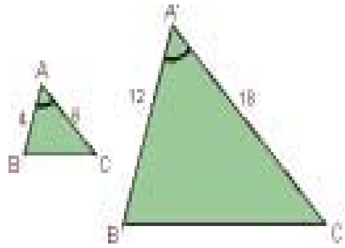
- *Los triángulos de las ilustraciones son semejantes. Cada una de las figuras verifica uno de los criterios de semejanza de triángulos.*



Primer criterio



Segundo criterio



Tercer criterio

Actividades resueltas

- *Calcula los valores desconocidos b′* y *c′* para que los triángulos de datos a = 9 cm, b = 6 cm, c = 12 cm. a' = 6 cm sean semejantes:

Sabemos que debe verificarse que: $a/a' = b/b' = c/c'$. Al sustituir se tiene: $9/6 = 6/b' = 12/c'$ y al despejar: $b' = 6\cdot6/9 = 4$ cm, $c' = 12\cdot6/9 = 8$ cm.

Actividades propuestas

17. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 60º y otro de 40º. Un ángulo de 80º y otro de 60º.
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80º. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50º.
c) A = 30º, b = 8 cm, c = 10 cm. A'= 30º, b' = 4 cm, c' = 5 cm
d) a = 7 cm, b = 8 cm, c = 12 cm. a' = 14 cm, b' = 16 cm, c' = 25 cm

18. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) a = 12 cm, b = 15 cm, c = 10 cm. a' = 5 cm, ¿ b', c'?

b) A = 37º, b = 10 cm, c = 12 cm. A' = 37º, b' = 10 cm, ¿c'?

19. Un triángulo tiene lados de 12 cm, 14 cm y 8 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

3.2. Semejanza de triángulos rectángulos: teorema de la altura y del cateto

Los triángulos rectángulos tienen un ángulo de 90º, así que para que dos triángulos rectángulos sean semejantes les basta con tener otro ángulo igual.

Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo, distinto del recto, igual, son semejantes y sus lados son proporcionales.

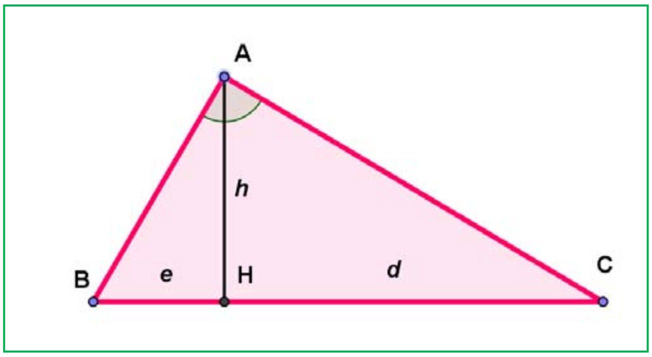
Debido a esto, la altura sobre la hipotenusa, divide al triángulo rectángulo en dos nuevos triángulos rectángulos que son semejantes, (pues comparten un ángulo con el triángulo de partida).

Utilizando ahora que los lados son proporcionales podemos escribir dos teoremas, el teorema de la altura y el del cateto.

Teorema de la altura

En un triángulo rectángulo la altura es media proporcional entre los segmentos en los que divide a la hipotenusa:

$$\frac{h}{e} = \frac{d}{h}.$$



En efecto, sea las longitudes de la altura $AH = h$, del segmento $BH = e$, y del segmento $HC = d$, al ser el triángulo ABC semejante al triángulo ABH y a su vez semejante al triángulo AHC, estos dos triángulos son semejantes, por lo que sus lados son proporcionales, por lo que:

Cateto menor de *AHC* / cateto menor de *ABH* = Cateto mayor de *AHC* / cateto mayor de *ABH* $\Rightarrow$

$$\frac{h}{e} = \frac{d}{h},$$

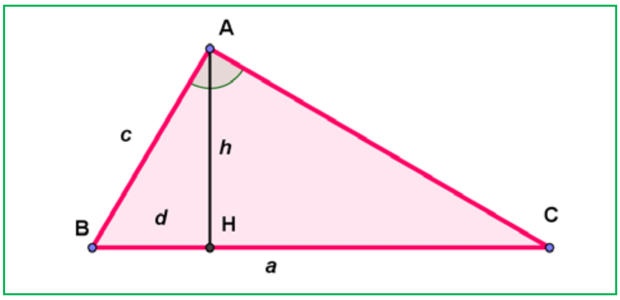
o lo que es lo mismo:

$$h^2 = e \cdot d.$$

Teorema del cateto

En un triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{d}.$$



Por la semejanza de los triángulos ABC y HBA sabemos que los lados correspondientes son proporcionales, por lo que:

hipotenusa del triángulo grande *ABC* / hipotenusa del triángulo pequeño *AHB* = cateto menor del triángulo grande *ABC* / cateto menor del triángulo pequeño *AHB*

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{d},$$

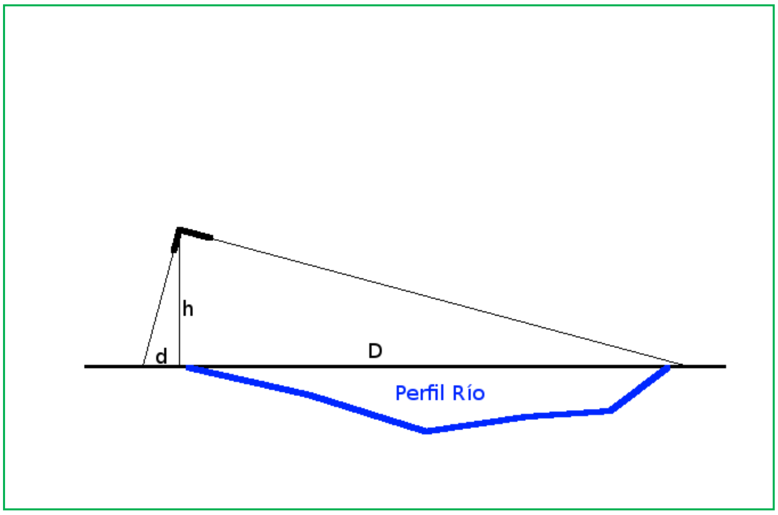
o lo que es lo mismo:

$$c^2 = a \cdot d.$$

Actividades resueltas

- *Nos han encargado medir el ancho de un río en varios puntos del curso. En la mayoría de los puntos hemos podido medirlo con una cuerda, pero hay un ensanche en el que no podemos medirlo así. Vamos a inventar un método que aplica el teorema de la altura que nos permita medirlo.*

Vamos a una tienda y compramos dos punteros láser. A continuación los unimos formando un ángulo de 90º. Después vamos a la parte del río que queremos medir y enfocamos uno de ellos hacia la otra orilla hasta que veamos el puntero. Ahora buscamos el puntero del otro láser que habíamos colocado a 90º y marcamos sobre el suelo.



Después de medir la altura a la que sostenemos los punteros y la distancia de la base hasta el segundo puntero, tenemos los siguientes datos:

d = 5 cm y h = 150 cm.

Aplicando el teorema de la altura, sabemos que:

$h^2 = d \cdot D$, así que $D = h^2/d$.

Por tanto $D = 150^2/5 = 4500$ cm = 45 metros.

Actividades propuestas

20. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 cm, ¿cuánto mide la altura sobre la hipotenusa?

21. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 cm, ¿cuánto mide la proyección sobre la hipotenusa de cada uno de esos catetos?

22. Dibuja los tres triángulos semejantes para el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 en posición de Tales.

Autor: Jorge Muñoz

Revisora: Nieves Zuasti

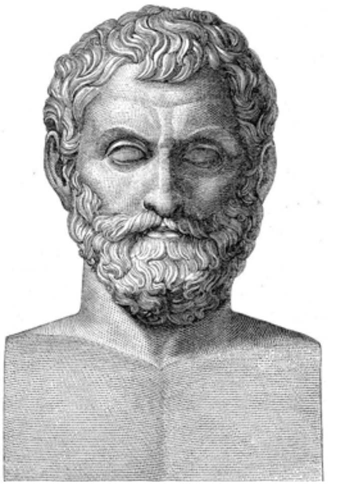
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

CURIOSIDADES. REVISTA

Tales de Mileto (ca. 624 – 548 a.C.)

Sobre la vida de Tales se sabe muy poco. Los antiguos opinaban que era excepcionalmente inteligente siendo considerado uno de los Siete Sabios de Grecia, y que había viajado y conocido los saberes de Egipto y Babilonia.

Pero no existe ningún documento que certifique nada sobre su vida, y es probable que no dejara obra escrita a su muerte. Eudemo de Rodas escribió una historia de las Matemáticas, que se perdió, pero alguien hizo un resumen de una parte, que también se perdió, y en el siglo V d.C. Proclo incluyó parte de dicho resumen en un comentario sobre los elementos de Euclides. ¡Eso es lo que sabemos sobre Tales y la Matemática!



Hay muchas leyendas sobre su vida como que:

- Se hizo rico alquilando unas almazaras durante un año en que la cosecha de aceituna fue abundante
- Fue mercader de sal
- Fue observador de las estrellas. Un día, por mirar las estrellas se cayó a un pozo, y cuando se reían de ello dijo que quería conocer las cosas del cielo, pero que lo que estaba a sus pies se le escapaba.
- Fue un hombre de estado
- Dirigió una escuela de náutica

Sobre matemáticas se le atribuyen diversos teoremas, aunque algunos ya eran conocidos por los babilonios, pero quizás él utilizó un razonamiento deductivo. Por ejemplo, se dice que demostró:

- Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto
- Un diámetro divide a un círculo en dos partes iguales
- Un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales
- Dos triángulos con dos ángulos iguales y un lado igual, son iguales
- Los ángulos opuesto por el vértice son iguales

¿A qué todos estos teoremas ya te los sabías tú?

Además de decirse de él que:

- predijo un eclipse,
- construyó un canal para desviar las aguas de un río para que lo cruzara un ejército

y también se dice que utilizó la semejanza de triángulos para

- calcular la altura de la pirámide de Keops,
- la distancia de un barco a la playa

¿Sabrías tu resolver esos dos últimos problemas?

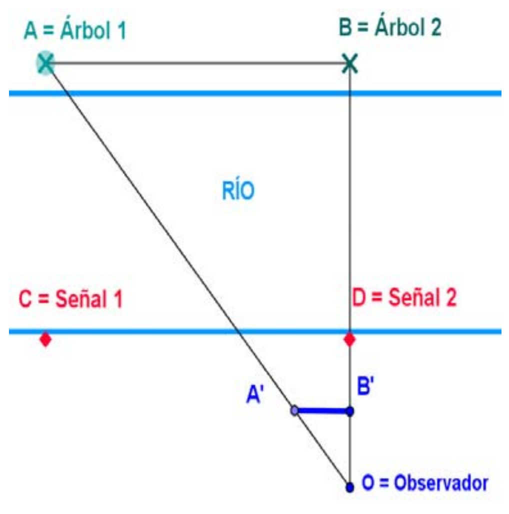
Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

Algunos problemas

- Calcula la altura de la Pirámide de Keops sabiendo que su sombra mide 175,93 metros y que al mismo tiempo la sombra de un bastón de altura un metro, mide 1,2 metros.

- Calcula la altura de un árbol sabiendo que su sombra mide 15 metros y que al mismo tiempo la sombra de un palo de altura un metro, mide 1,5 metros.

- Unos exploradores encuentran un río y quieren construir una pasarela para cruzarlo, pero, ¿cómo conocer la anchura del río, si no podemos ir a la otra orilla? ¡Piensa! ¡Piensa! Seguro que se te ocurren muchas buenas ideas, mejores que la que te vamos a comentar a continuación.
- Buscas en la orilla opuesta dos árboles, (o dos rocas, o …), *A* y *B*. Colocándote en tu orilla perpendicular a ellos, marcas dos señales, (Señal 1 y Señal 2), y mides así la distancia entre esos dos árboles. Ahora midiendo ángulos dibujas dos triángulos semejantes. Uno, en tu orilla, lo puedes medir, y por semejanza de triángulos calculas los lados del otro.



Imagina que la distancia *CD* es de 10 metros, que *A’B’* mide 2 metros y que *OB’* = 2,5 m. ¿Cuánto mide *OB*? Si *OD* mide 5 metros, ¿cuánto mide la anchura de río?

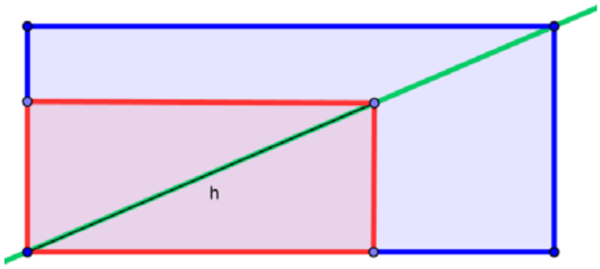
¡Piensa! ¡Piensa!

¿Cómo podrías conocer a qué distancia de la costa está un barco?

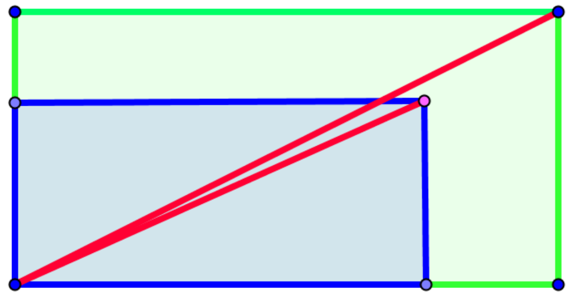
Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

Rectángulos semejantes

Para saber si dos rectángulos son semejantes se colocan uno sobre el otro, con dos lados comunes, y si tienen la misma diagonal, son semejantes



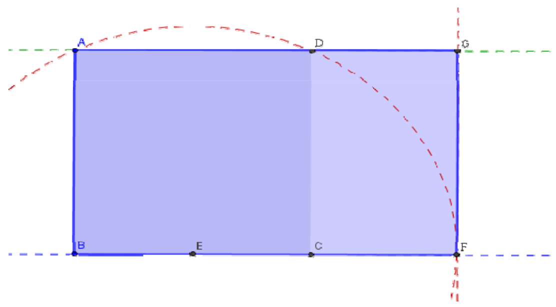
Rectángulos semejantes



No son semejantes

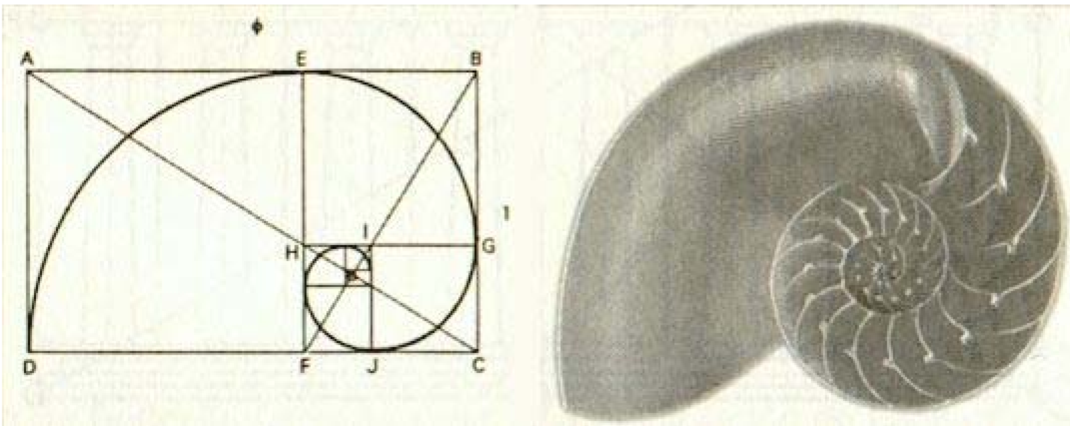
Rectángulo áureo

Un rectángulo es áureo si sus lados están en proporción áurea. Todos los rectángulos áureos son semejantes.



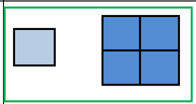
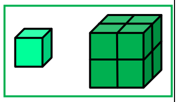
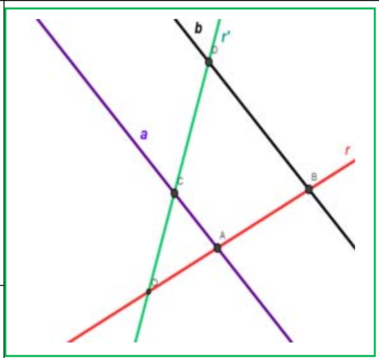
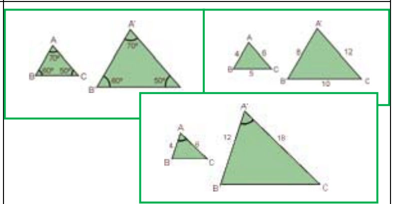
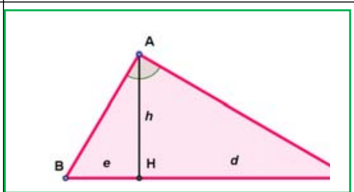
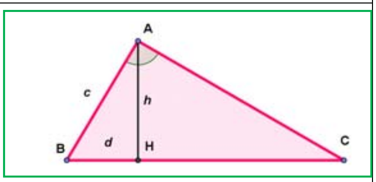
Si a un rectángulo áureo se le quita (o añade) un cuadrado, se obtiene un rectángulo semejante al de partida y por lo tanto también áureo.

Puedes construir una espiral con rectángulos áureos cómo indica la figura



Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

RESUMEN

		Ejemplos
Figuras semejantes	Si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales.	
Razón de semejanza	Coeficiente de proporcionalidad	
Semejanza en longitudes, áreas y volúmenes	Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es $\boldsymbol{k}$, entonces la razón entre sus áreas es $\boldsymbol{k}^2$ y entre sus volúmenes es $\boldsymbol{k}^3$.	 
Teorema de Tales	Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. La recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*. Entonces: $$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$	
Recíproco del teorema de Tales	Si $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$ entonces ***a*** y ***b*** son paralelas.	
Semejanza de triángulos	Dos triángulos son **semejantes** tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.	
Criterios de semejanza de triángulos	Dos triángulos son semejantes sí: **Primero:** Tienen dos ángulos iguales. **Segundo:** Tienen los tres lados proporcionales. **Tercero:** Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.	
Teorema de la altura	En un triángulo rectángulo la altura es media proporcional de los segmentos en los que divide a la hipotenusa: $\frac{h}{e}=\frac{d}{h}$.	
Teorema del cateto	En un triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella: $\frac{a}{c}=\frac{c}{d}$.	

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Figuras semejantes

1. Busca fotografías, planos, fotocopias, figuras a escala, etc. toma medidas y determina las razones de semejanza. Calcula las medidas reales y comprueba que la razón de semejanza obtenida es correcta.

2. En un mapa de carretera de escala 1:3000 la distancia entre dos ciudades es de 2,7 cm. Calcula la distancia real entre dichas ciudades.

3. Un microscopio tiene un aumento de 500X, ¿qué tamaño tiene la imagen que se ve por el objetivo si observamos un paramecio de 0,034 mm de diámetro?

4. Pericles murió de peste en el año 429 a. C. Consultado el oráculo de Apolo debían construir un altar en forma de cubo cuyo volumen duplicara exactamente el que ya existía. ¿Cuál debía ser la razón de proporcionalidad de los lados? ¿Es posible construir exactamente un cubo con dicha razón?

5. En una fotografía una persona que sabe que mide 1,75 m tiene una altura de 2,3 cm. Aparece un árbol que en la fotografía mide 5,7 cm, ¿cuánto mide en la realidad?

6. ¿Cuánto mide el lado de un icosaedro cuya superficie es el triple del de otro icosaedro de lado 4 cm?

7. Suponemos que un melocotón es una esfera, y que su hueso tiene un diámetro que es un tercio del del melocotón. ¿Cuánto es mayor la pulpa del melocotón que su hueso?

8. ¿Son semejantes todos los cuadrados? ¿Y todos los rombos? ¿Y todos los rectángulos? ¿Cuándo son semejantes dos rombos? ¿Y dos rectángulos?

9. El área de un rectángulo es 10 cm^2, y uno de sus lados mide 2 cm, ¿qué área tiene un rectángulo semejante al anterior en el que el lado correspondiente mide 1 cm? ¿Qué perímetro tiene?

10. ¿Son semejantes todas las esferas? ¿Y los icosaedros? ¿Y los cubos? ¿Y los dodecaedros? ¿Cuándo son semejantes dos cilindros?

11. La arista de un octaedro mide 7,3 cm, y la de otro 2,8 cm, ¿Qué relación de proporcionalidad hay entre sus superficies? ¿Y entre sus volúmenes?

12. La medida normalizada A$ tiene la propiedad de que partimos el rectángulo por la mitad de su parte más larga, el rectángulo que se obtiene es semejante al primero. Duplicando, o dividiendo se obtienen las dimensiones de los rectángulo A1, A2, A3, A4, A5…. El rectángulo A4 mide 29,7 cm x 21 cm. Determina las medidas de A3 y de A5.

13. Dibuja un pentágono regular y traza sus diagonales. Tienes un nuevo pentágono regular. ¿Cuál es la razón de semejanza?

14. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular y traza sus diagonales. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto? Este triángulo se denomina *triángulo áureo*, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro. En la figura que has trazado hay otros triángulos semejantes al áureo, ¿qué relación de proporcionalidad hay entre ellos?

15. El mapa a escala 1:1500000 de una región tiene un área de 1600 cm^2, ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicha región?

16. Eratostenes de Alejandría (276 – 196 a. C.) observó que en Siena la dirección de los rayos solares era perpendicular a la superficie de la Tierra en el solsticio de verano. Viajó siguiendo el curso del Nilo una distancia de 790 km (5 mil estadios) y midió la inclinación de los rayos del sol en el solsticio de verano en Alejandría que era de α = 7º 12'. Utilizó la proporcionalidad: $2\pi R/790 = 360º/\alpha$ para determinar el radio de la Tierra. ¿Qué obtuvo?

17. Tenemos un conjunto de rectángulos de lados: A: 4 y 7, B: 2 y 5, C: 8 y 14, D: 4 y 10, E: 3 y 7, F: 9 y 21. Indica cuáles son semejantes. Dibuja y recorta el rectángulo A, y dibuja el resto de rectángulos. Superpón el rectángulo A con los otros rectángulos y explica que observas con el que es semejante. ¿Qué longitud tiene el otro lado de un rectángulo semejante a A cuyo lado menor mida 10 cm?

El teorema de Tales

18. Divide un segmento cualquiera en 5 partes iguales utilizando el teorema de Tales. Sabrías hacerlo por otro procedimiento exacto?

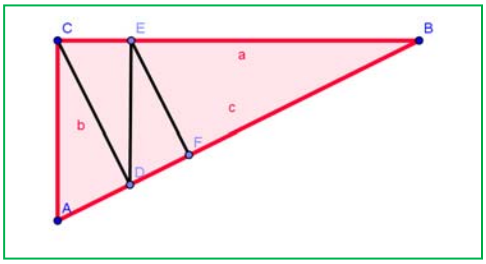
19. Divide un segmento cualquiera en 3 partes proporcionales a 2, 3, 5 utilizando el teorema de Tales.

20. Si alguien mide 1'75 m y su sombra mide 1 m, calcula la altura del edificio cuya sombra mide 25 m a la misma hora.

21. Un rectángulo tiene una diagonal de 75 m. Calcula sus dimensiones sabiendo que es semejante a otro rectángulo de lados 36 m y 48 m.

22. Sean *OAC* y *OBD* dos triángulos en posición Tales. El perímetro de *OBD* es 200 cm, y *OA* mide 2 cm, *AC* mide 8 cm y *OC* mide 10 cm. Determina las longitudes de los lados de *OBD.*

23. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados *a* = 60, *b* = 45 y *c*= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*, y el escriba ha calculado la longitud del lado *AD*. Utiliza el teorema de Tales para determinar las longitudes de los segmentos *AD*, *CD*, *DE*, *DF*, *EB*, *BF* y *EF*. Calcula el área del triángulo *ABC* y de los triángulos *ACD, CDE, DEF* y *EFB*.



Semejanza de triángulos

24. El triángulo rectángulo *ABC* tiene un ángulo de 54º y otro triángulo rectángulo tiene un ángulo de 36º. ¿Podemos asegurar que son semejantes? Razona la respuesta.

25. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm y la altura sobre la hipotenusa mide 10 cm, ¿cuánto miden los catetos?

26. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 50º y otro de 40º. Un ángulo de 90º y otro de 40º.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 40º. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 70º.

c) *A* = 72º, *b* = 10 cm, *c* = 12 cm. *A'*= 72º, *b'* = 5 cm, *c'* = 6 cm.

d) *a* = 7 cm, *b* = 5 cm, *c* = 8 cm. *a'* = 21 cm, *b'* = 15 cm, *c'* = 24 cm.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

27. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) a = 12 cm, b = 9 cm, c = 15 cm. a' = 8 cm, ¿b', c'?

b) A = 45º, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 45º, b' = 24 cm, ¿a'?

28. Las longitudes de los lados de un triángulo son 7 cm, 9 cm y 10 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 65 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

29. La sombra de un edificio mide 23 m, y la del primer piso 3 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 2,7 m, ¿cuánto mide el edificio?

30. Demuestra que en dos triángulos semejantes las bisectrices son proporcionales.

31. Un triángulo rectángulo isósceles tiene la hipotenusa de longitud 9 cm, igual a un cateto de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?

32. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Son semejantes? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?

33. La altura y la base de un triángulo isósceles miden respectivamente 7 y 5 cm; y es semejante a otro de base 12 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.

34. Los triángulos siguientes son semejantes. Averigua la medida de los ángulos que faltan sabiendo que:

a) Son rectángulos y un ángulo del primer triángulo mide 52º.

b) Dos ángulos del primer triángulo miden 30º y 84º.

35. Los triángulos siguientes son semejantes. Averigua las medidas que faltan sabiendo que:

a) Los lados del primer triángulo miden 10 m, 15 m y z m. Los del segundo: x m, 9 m y 8 m.
b) Los lados del primer triángulo miden 4 m, 6 m y 8 m. Los del segundo: 6 m, x m y z m.
c) Un lado del primer triángulo mide 12 cm y la altura sobre dicho lado 6 cm. El lado correspondiente del segundo mide 9 cm, y la altura x cm
d) Un triángulo isósceles tiene el ángulo desigual de 35º y el lado igual de 20 cm y el desigual de 7 cm; el otro tiene el lado igual de 5 cm. ¿Cuánto miden sus otros lados y ángulos?

36. Enuncia el primer criterio de semejanza de triángulos para triángulos rectángulos.

37. Los egipcios usaban una cuera con nudos, todos a la misma distancia, para obtener ángulos rectos. Formaban triángulos de longitud 3, 4 y 5. ¿Por qué? Los indios y los chinos usaban un procedimiento similar aunque utilizando cuerdas con los nudos separados en 5, 12 y 13, y también 8, 15 y 17. ¿Por qué? Escribe las longitudes de los lados de triángulos semejantes a los indicados.

38. Se quiere calcular la altura de un árbol para lo que se mide su sombra: 13 m, y la sombra de un palo de 1’2 m de longitud, 0,9 m. ¿Qué altura tiene el árbol?

39. Ahora no podemos usar el procedimiento de la sombra porque el árbol es inaccesible (hay un rio en medio) pero sabemos que está a 30 m de nosotros. ¿Cómo lo harías? Pepe ha cogido un lápiz que mide 10 cm y lo ha colocado a 50 cm de distancia. De ese modo ha conseguido ver alineado la base del árbol con un extremo del lápiz, y la punta del árbol con el otro. ¿Cuánto mide este árbol?

40. Arquímedes calculaba la distancia a la que estaba un barco de la costa. Con una escuadra ABC alineaba los vértices BC con el barco, C', y conocía la altura del acantilado hasta el vértice B. Dibuja la situación, determina qué triángulos son semejantes. Calcula la distancia del barco si BB' = 50 m, BA = 10 cm, AC = 7 cm.

AUTOEVALUACIÓN

1. En un mapa de carretera de escala 1:1200 la distancia entre dos pueblos es de 5 cm. La distancia real entre dichos pueblos es de:

a) 60 m b) 60 km c) 240 km d) 240 cm

2. Si un microscopio tiene un aumento de 1000X, ¿qué tamaño (aparente) piensas que tendrá la imagen que se vea por el objetivo si observamos una célula de 0,01 mm de diámetro

a) 1 cm b) 1 mm c) 0,1 cm d) 100 mm

3. Queremos construir un cuadrado de área doble de uno de un metro de lado. El lado del nuevo cuadrado debe medir:

a) 2 metros b) $\sqrt{2}$ metros c) $\sqrt[3]{2}$ metros d) 1,7 metros

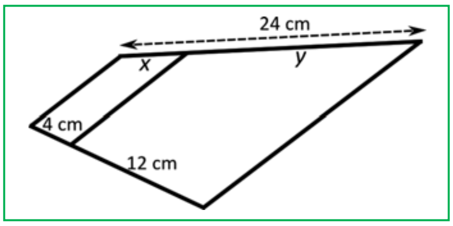
4. Sean *OAC* y *OBD* dos triángulos en posición *Tales*. El perímetro de *OBD* es 50 cm, y *OA* mide 1 cm, *AC* mide 1,5 cm y OC mide 2,5 cm. Las longitudes de los lados de *OBD* son:

a) *OB* = 10 cm, *OD* = 20 cm, *BD* = 30 cm b) *OB* = 25 cm, *OD* = 10 cm, *BD* = 15 cm

c) *OB* = 10 cm, *OD* = 15 cm, *BD* = 25 cm d) *OB* = 15 cm, *OD* = 25 cm, *BD* = 30 cm.

5. En la figura adjunta los valores de *x* e *y* son:

a) 6 y 12 cm b) 5 y 19 cm c) 6 y 18 cm d) 5 y 20 cm



6. Los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes. Los lados de *ABC* miden 3, 5 y 7 cm, y el perímetro de *DEF* mide 60 m. Los lados de *DEF* miden:

a) 6, 10 y 14 cm b) 12, 20 y 28 cm c) 9, 15 21 m d) 12, 20 y 28 m

7. Dos triángulos rectángulos son proporcionales si:

a) Tienen los catetos proporcionales

b) Tienen un ángulo igual

c) Tienen un ángulo distinto del recto igual

d) Sus áreas son proporcionales

8. Los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes. El ángulo A mide 30º, y B, 72º. ¿Cuánto miden los ángulos *D*, *E* y *F*?

a) *D* = 72º, *E* = 78º y *F* = 30º b) *D* = 30º, *E* = 88º y *F* = 72º c) *D* = 30º, *E* = 72º y *F* = 68º

9. La altura de un triángulo rectángulo divide a la hipotenusa en dos segmentos de longitud 5 y 4 cm, ¿cuánto mide la altura?

a) 5,67 cm b) 4 cm c) 6 cm d) 5 cm

10. La proyección de un cateto sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 4 cm, y la hipotenusa 9 cm, ¿cuánto mide el cateto?

a) 7 cm b) 5 cm c) 5,67 cm d) 6 cm.