MATEMÁTICAS: 4ºB ESO
Capítulo 3: Expresiones algebraicas. Polinomios.

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Revisor: Javier Rodrigo

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

y commons.wikimedia

Índice

Resumen

En multitud de situaciones el ser humano se ve obligado a cuantificar, a manejar cantidades, datos, números, ya sea para explicar algo ocurrido en el pasado, algún hecho que esté sucediendo en la actualidad, o para predecir o pronosticar el comportamiento de determinado fenómeno en el futuro. Pese a la dificultad que puedan encerrar esas justificaciones, algunas herramientas son de carácter sencillo, como las operaciones usuales de suma, resta, producto y división. En ocasiones hay que manejar datos aún no conocidos, por lo que aparecen indeterminadas o variables. La mezcla de números reales y las citadas cuatro operaciones básicas nos lleva a las expresiones algebraicas y, dentro de ellas, destacan unas expresiones concretas por su abundante uso y simplicidad de exposición, los polinomios.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.1. Introducción

No hace falta imaginar situaciones rebuscadas para que, a la hora de realizar un razonamiento, nos topemos con alguna de las cuatro operaciones matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación o división.

Ejemplos:

- Tres amigos han realizado un viaje de vacaciones. A la vuelta, han sumado los gastos efectuados y éstos ascienden a 414 euros. El gasto realizado por cada uno ha sido de $\frac{414}{3}$ euros, es decir, 138 euros.
- Si vamos a comprar mandarinas a una frutería en la que el precio de un kilogramo es de 1'25 euros, resulta habitual que, según vamos introduciendo la fruta en una bolsa, vayamos tanteando el importe final. Para ello podemos colocar varias veces la bolsa sobre una balanza y, tras observar el peso, realizamos la operación

$$1'25 \cdot x$$

donde x es la cantidad de kilogramos que nos ha indicado la balanza. Después de cada pesada, el resultado de esa multiplicación refleja el importe de las mandarinas que, en ese momento, contiene la bolsa.

- Supongamos que tenemos un contrato con una compañía de telefonía móvil por el que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecimiento de llamada. Con esa tarifa, una llamada de 3 minutos nos costará:

$$(0'05 \cdot 3) + 0'12 = 0'15 + 0'12 = 0'27 \text{ euros}$$

Pero ¿cuál es el precio de una llamada cualquiera? Como desconocemos su duración, nos encontramos con una cantidad no determinada, o indeterminada, por lo que en cualquier respuesta que demos a la pregunta anterior se apreciará la ausencia de ese dato concreto. Podemos decir que el coste de una llamada cualquiera es

$$(0'05 \cdot x) + 0'12 = 0'05 \cdot x + 0'12 \text{ euros}$$

donde x señala su duración, en minutos.

Actividades propuestas

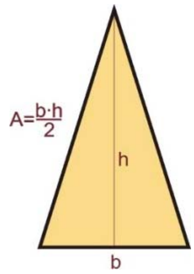
1. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (N) así como la cantidad total de minutos de conversación (M). Con los datos del anterior ejemplo, justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es:

$$(0'05 \cdot M) + (0'12 \cdot N) = 0'05 \cdot M + 0'12 \cdot N \text{ euros}$$

Ejemplo:

- Es bien conocida la *fórmula* del área de un triángulo de base *b* y altura asociada *h*:

$$\frac{b \cdot h}{2}$$



En todos estos ejemplos han surgido **expresiones algebraicas**.

1.2. Expresiones algebraicas

Llamamos **expresión algebraica** a cualquier expresión matemática que se construya con números reales y las operaciones matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación y/o división. En una expresión algebraica puede haber datos no concretados; según el contexto, recibirán el nombre de ***variable***, ***indeterminada***, ***parámetro***, entre otros.

Si en una expresión algebraica no hay *variables*, dicha expresión no es más que un número real:

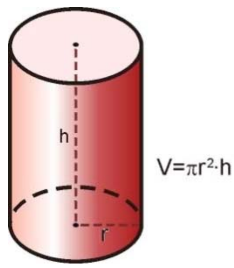
Ejemplo:

$$\frac{3\cdot(-7)}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}+1=\frac{-21}{\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}}+1=\frac{-21}{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}}+1=\frac{-21}{\frac{2}{15}}+1=\frac{-21\cdot 15}{2}+1=\frac{-315}{2}+1=\frac{-315}{2}+\frac{2}{2}=\frac{-313}{2}$$

Al fijar un valor concreto para cada *indeterminada* de una expresión algebraica aparece un número real: el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas.

Ejemplo:

- El volumen de un cilindro viene dado por la expresión algebraica
$$\pi \cdot r^2 \cdot h$$
en la que *r* es el radio del círculo base y *h* es su altura. De este modo, el volumen de un cilindro cuya base tiene un radio de 10 cm y de altura 15 cm es igual a:
$$\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1500 \cdot \pi \quad cm^3$$



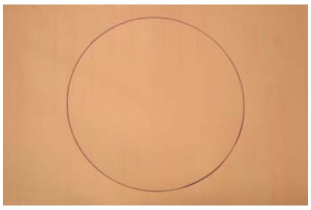
- La expresión algebraica que representa el producto de los cuadrados de dos números cualesquiera x e y se simboliza por $x^2 \cdot y^2$.
- Si en la expresión
$$7+\frac{x}{2}+x\cdot y^3-\frac{6}{z}$$
particularizamos las tres variables con los valores
$$x=4,\ y=-1,\ z=\frac{1}{2}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

surge el número real

$$7+\frac{4}{2}+4\cdot(-1)^3-\frac{6}{1/2}=7+2-4-12=-7$$

En una expresión algebraica puede no tener sentido otorgar algún valor a cierta indeterminada. En efecto, en el último ejemplo no es posible hacer $z=0$.



Actividades propuestas

2. Recuerda la expresión algebraica que nos proporciona la longitud de una circunferencia.

3. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera x e y :

a) La mitad del opuesto de su suma.

b) La suma de sus cubos

c) El cubo de su suma

d) El inverso de su suma

e) La suma de sus inversos

4. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 20 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.

5. El anterior comercio, en los últimos días del periodo de rebajas, desea deshacerse de sus existencias y para ello ha decidido aumentar el descuento. Mantiene el 20 % para la compra de una única prenda y, a partir de la segunda, el descuento total aumenta un 5 % por cada nueva pieza de ropa, hasta un máximo de 10 artículos. Analiza cuánto pagaremos al realizar una compra en función de la suma total de las cantidades que figuran en las etiquetas y del número de artículos que se adquieran.

6. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o valores que se indican:

a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$.

b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ y $b = 4$.

c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.

7. Indica, en cada caso, el valor numérico de la siguiente expresión: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$

b) $x = 2$, $y = 0$, $z = 5$

c) $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$.

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

2.1. Monomios. Polinomios

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos, son los **monomios**.

Un **monomio** viene dado por el producto de números reales e indeterminadas. Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número real que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas; la indeterminada, o indeterminadas, conforman la **parte literal** del monomio.

Ejemplos:

- La expresión que nos proporciona el doble de una cantidad, $2 \cdot x$, es un monomio con una única variable, x, y coeficiente 2.
- El volumen de un cilindro, $\pi \cdot r^2 \cdot h$, es un monomio con dos indeterminadas, r y h, y coeficiente π. Su parte literal es $r^2 \cdot h$.
- Otros monomios: $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$, $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$
- La expresión $7xy^2 + 3xy - 2x$ está formada por tres términos, tres monomios. Cada uno tiene un coeficiente y una parte literal:

  En el primero, $7xy^2$, el coeficiente es 7 y la parte literal xy^2

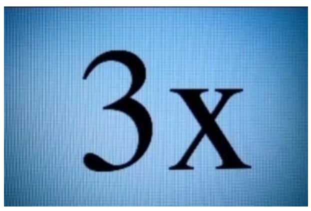
  El segundo, $3xy$, tiene por coeficiente 3 y parte literal xy

  Y en el tercero, $-2x$, el coeficiente es -2 y la parte literal x

Atendiendo al exponente de la variable, o variables, adjudicaremos un **grado** a cada monomio con arreglo al siguiente criterio:

- Cuando haya una única indeterminada, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
- Si aparecen varias indeterminadas, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.

Ejemplos:



- $2 \cdot x$ es un monomio de grado 1 en la variable x.
- $\pi \cdot r^2 \cdot h$ es un monomio de grado 3 en las indeterminadas r y h.
- $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$ es un monomio de grado 5 en x e y.
- $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ es un monomio de grado 4 en x, y y z.

Un número real puede ser considerado como un monomio de grado 0.

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios. El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{5} \cdot x^2 - 7 \cdot x^3 + 2$ es un polinomio de grado 3 en la variable x.
- $-3 \cdot y^4 + 8 \cdot x^2 + 2 \cdot x$ es un polinomio de grado 4 en las indeterminadas x e y.
- $4 \cdot x^2 \cdot y^3 - 7 + 3 \cdot y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y.
- $x - 2 \cdot y + 6 \cdot z$ es un polinomio de grado 1 en x, y y z.

Tanto en esta sección como en la siguiente nos limitaremos, básicamente, a considerar polinomios con una única variable. Es habitual escribir los diferentes monomios de un polinomio de forma que sus grados vayan en descenso para, con este criterio, apreciar en su primer monomio cuál es el grado del polinomio.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números reales.

Decimos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Ejemplos:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ es un polinomio de grado 4 en la variable x.
- $4y^3 + 3y - 7$ es un polinomio de grado 3 en la indeterminada y.
- $z^2 - 3z + 12$ es un polinomio de grado 2 en z. Además, es un polinomio mónico.
- $3x + 9$ es un polinomio de grado 1 en x.

Como ocurre con cualquier expresión algebraica, si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número real: el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable. Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número -3 la denotamos por $p(-3)$, y leemos *"p de menos tres"* o *"p en menos tres"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o $p(x)$ indistintamente.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número real otro número real.

Ejemplos:

- Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x=5$ nos encontramos con el número

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

- El valor del polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ es

$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

- Al particularizar el polinomio $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z=0$ resulta el número $r(0) = 12$.

2.2. Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Ejemplos:

- La suma de los polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ y $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ es el polinomio

$$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2 - 6) =$$
$$= (-3 - 1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

- $(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$
- $(2x^3 + 1) + (-x^4 + 4x) = -x^4 + 2x^3 + 4x + 1$
- $(x^3 + 9) + (-x^3 + 2) = 11$
- $3xy + 5xy + 2x = 8xy + 2x$

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\
+ & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\
\hline
 & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2
\end{array}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Propiedades de la suma de polinomios

Propiedad conmutativa. Si *p* y *q* son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de sumarlos:

$$p+q \equiv q+p$$

Ejemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$$

$$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden sumar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p+q)+r \equiv p+(q+r)$$

Ejemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$
$$=(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

También:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$
$$=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Actividades propuestas

8. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

- $(x^2-x)+(-2x^2-3x+1)+(2x^3-2x^2+x-2)$
- $-x^4+(x^3+2x-3)+(-3x^2-5x+4)+(2x^3-x+5)$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: el resultado de sumarlo con cualquier otro siempre es éste último. Se trata del polinomio dado por el número 0, el *polinomio cero*.

Ejemplo:

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

Elemento opuesto. Cada polinomio tiene asociado otro, al que llamaremos su *polinomio opuesto*, tal que la suma de ambos es igual al polinomio cero. Alcanzamos el polinomio opuesto de uno dado, simplemente, cambiando el signo de cada monomio.

Ejemplo:

- El polinomio opuesto de $p \equiv -2x^4 + x^3 + 2x - 7$ es $2x^4 - x^3 - 2x + 7$, al que denotaremos como $"-p"$. Ratifiquemos que su suma es el polinomio cero:

$$(-2x^4 + x^3 + 2x - 7) + (2x^4 - x^3 - 2x + 7) = (-2x^4 + 2x^4) + (x^3 - x^3) + (2x - 2x) + (-7 + 7) = 0$$

Actividades propuestas

9. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

- $3x^4 + 5x^3 + x^2 + 4x - 1$
- $7x$
- $-x^4 + 3x^2$

10. Considera los polinomios $p \equiv -x^3 - 5x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

11. Obtén el valor del polinomio $p \equiv -x^3 - 5x + 2$ en $x = 3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 3$?

2.3. Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella toma valores en los números reales, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto de los números reales, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Ejemplos:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $(-x^3+3x-1)\cdot(-2x)=(-x^3)\cdot(-2x)+(3x)\cdot(-2x)+(-1)\cdot(-2x)=2x^4-6x^2+2x$
- $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x)\cdot(x^2-4x-5)+(-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x^3-12x^2-15x)+(-2x^2+8x+10)=$
  $=3x^3+(-12x^2-2x^2)+(-15x+8x)+10=3x^3-14x^2-7x+10$
- $(x-6)\cdot(x^3-2x)=(x-6)\cdot x^3+(x-6)\cdot(-2x)=(x^4-6x^3)+(-2x^2+12x)=x^4-6x^3-2x^2+12x$

También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:

Ejemplo:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
 & -2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
 & -2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}
$$

Recordemos que el polinomio *opuesto* de otro se obtiene simplemente cambiando el signo de cada monomio. Esta acción se corresponde con multiplicar por el número "-1" el polinomio original. De esta forma el polinomio opuesto de p es

$$-p\equiv(-1)\cdot p$$

En este momento aparece de manera natural la **operación diferencia**, o **resta**, de polinomios. La definimos con la ayuda del polinomio opuesto de uno dado:

$$p-q\equiv p+(-q)\equiv p+(-1)\cdot q$$

Ejemplo:

$$(-5x^2-3x+2)-(-2x^4+x^3+3x^2+6)=(-5x^2-3x+2)+(2x^4-x^3-3x^2-6)=$$
$$=2x^4-x^3+(-5x^2-3x^2)-3x+(2-6)=2x^4-x^3-8x^2-3x-4$$

Actividades propuestas

12. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

- $(-4x^3+2x)\cdot(-3x^2)$
- $(2x^4+x)\cdot(-3x-4)$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $(2x^3+x^2-x)\cdot(3x^2-x)$
- $(-1)\cdot(7x^3-4x^2-3x+1)$

13. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

- $(-4x^3+2x)-(-3x^2)$
- $(2x^4+x)-(-3x-4)$
- $(3x^2-x)-(2x^3+x^2-x)$

14. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

- $4x^3-3x^2+2x$
- $-2x^4+x-1$
- $-x^2+x-7$

15. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x\cdot(2x^2+4x-6)$ b) $(3x-4)\cdot(4x+6)$

c) $(2a^2-5b)\cdot(4b-3a^3)$ d) $(3a-6)\cdot(8-2a)\cdot(9a-2)$

Propiedades del producto de polinomios

Propiedad conmutativa. Si *p* y *q* son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de multiplicarlos:

$$p\cdot q\equiv q\cdot p$$

Ejemplo:

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2)=2x\cdot(-x^3+x^2)-7\cdot(-x^3+x^2)=-2x^4+2x^3+7x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7)=-x^3\cdot(2x-7)+x^2\cdot(2x-7)=-2x^4+7x^3+2x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden multiplicar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p\cdot q)\cdot r\equiv p\cdot(q\cdot r)$$

Ejemplo:

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$

$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

También:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right)=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Actividades propuestas

16. Realiza los siguientes productos de polinomios:

- $x^2\cdot(-2x^2-3x+1)\cdot 2x^3$
- $(2x-3)\cdot(-3x^2-5x+4)\cdot(-x)$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: al multiplicarlo por cualquier otro siempre nos da éste último. Se trata del polinomio dado por el número 1, el *polinomio unidad*.

Ejemplo:

$$1\cdot(-5x^3-2x+3)=(-5x^3-2x+3)\cdot 1=-5x^3-2x+3$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Cuando en una multiplicación de polinomios uno de los factores viene dado como la suma de dos polinomios como, por ejemplo,

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)=(3x^2-x)\cdot\left(x^3-6x+7\right)=$$
$$=3x^5-18x^3+21x^2-x^4+6x^2-7x=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)=(3x^2-x)\cdot(-2x+7)+(3x^2-x)\cdot(x^3-4x)=$$
$$=(-6x^3+21x^2+2x^2-7x)+(3x^5-12x^3-x^4+4x^2)=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

Comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

En general, la **propiedad distributiva** de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$p\cdot(q+r)\equiv(p\cdot q)+(p\cdot r)$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente se denomina **sacar factor común**.

Ejemplo:

$$6x^5-4x^4-18x^3+2x^2=(3x^3-2x^2-9x+1)\cdot 2x^2$$

Actividades propuestas

17. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

- $-15x^3-20x^2+10x$
- $24x^4-30x^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. Introducción a las fracciones polinómicas

Hasta este momento hemos estudiado varias operaciones con polinomios: suma, resta y producto. En cualquiera de los casos el resultado siempre es otro polinomio. Cuando establecemos una **fracción polinómica** como, por ejemplo,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

lo que tenemos es una expresión algebraica, una **fracción algebraica**, la cual, en general, no es un polinomio. Sí aparece un polinomio en el muy particular caso en el que el denominador es un número real diferente de cero, esto es, un polinomio de grado 0.

Es sencillo constatar que la expresión anterior no es un polinomio: cualquier polinomio puede ser evaluado en cualquier número real. Sin embargo esa expresión no puede ser evaluada para $x=1$, ya que nos quedaría el número 0 en el denominador.

Podríamos creer que la siguiente fracción polinómica sí es un polinomio:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

La expresión de la derecha sí es un polinomio, pues se trata de una suma de monomios, pero la de la izquierda no lo es ya que no puede ser evaluada en $x = 0$. No obstante, esa fracción algebraica y el polinomio, cuando son evaluados en cualquier número diferente de cero, ofrecen el mismo valor. Son **expresiones equivalentes** allí donde ambas tienen sentido.

3.2. División de polinomios

Aunque, como hemos visto en el apartado anterior, una fracción polinómica, en general, no es un polinomio, vamos a adentrarnos en la división de polinomios pues es una cuestión importante y útil.

Analicemos con detenimiento la división de dos números enteros positivos. Cuando dividimos dos números, *D* (dividendo) entre *d* (divisor, distinto de 0), surgen otros dos, el cociente (*c*) y el resto (*r*). Ellos se encuentran ligados por la llamada *prueba de la división*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativamente:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Además, decimos que la división es exacta cuando $r = 0$.

El conocido algoritmo de la división persigue encontrar un número entero, el cociente *c*, tal que el resto *r* sea un número menor que el divisor *d*, y mayor o igual que cero. Fijémonos en que, sin esta exigencia para el resto *r*, podemos escoger arbitrariamente un valor para el cociente *c* el cual nos suministra su valor asociado como resto *r*. En efecto, si tenemos como dividendo *D* = 673 y como divisor *d* = 12, "si queremos" que el cociente sea *c* = 48 su resto asociado es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

y la conexión entre estos cuatro números es

$$673 = 12 \cdot 48 + 97$$

Esta última "lectura" de la división de números enteros va a guiarnos a la hora de dividir dos polinomios.

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, la división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, nos proporcionará otros dos polinomios, el polinomio cociente $c(x)$ y el polinomio resto $r(x)$. También aquí pesará una exigencia sobre el polinomio resto: su grado deberá ser menor que el grado del polinomio divisor. La relación entre los cuatro será, naturalmente,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

También escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

aunque, en tal caso, seremos conscientes de las cautelas señaladas en el apartado anterior en cuanto a las equivalencias entre polinomios y otras expresiones algebraicas.

Al igual que ocurre con el algoritmo de la división entera, el algoritmo de la división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada una de las cuales aparecen unos polinomios cociente y resto "provisionales" de forma que el grado de esos polinomios resto va descendiendo hasta que nos topamos con uno cuyo grado es inferior al grado del polinomio divisor, lo que indica que hemos concluido. Veamos este procedimiento con un ejemplo concreto.

Ejemplo:

Vamos a dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Como el polinomio divisor, $q(x)$, es de grado 2, debemos encontrar dos polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, y un polinomio resto $r(x)$ de grado 1 o 0, tales que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

o, como igualdad entre expresiones algebraicas,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

A la vista de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, y de lo dicho sobre $r(x)$, es evidente que el grado del polinomio cociente, $c(x)$, ha de ser igual a 2. Vamos a obtenerlo monomio a monomio.

- Primera aproximación a los polinomios cociente y resto:

Para poder lograr la igualdad $p \equiv q \cdot c + r$, como el grado de $r(x)$ será 1 o 0, el término de mayor grado de $p(x)$, $6x^4$, surgirá del producto $q(x) \cdot c(x)$. Así obtenemos la primera aproximación de $c(x)$, su monomio de mayor grado:

$$c_1(x) = 3x^2$$

y, de manera automática, también un primer resto $r_1(x)$:

$$r_1(x) = p(x) - q(x) \cdot c_1(x) = (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 3x^2 =$$
$$= (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (6x^4 - 3x^3 + 9x^2) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$$

Como este polinomio $r_1(x)$ es de grado 3, mayor que 2, el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- Segunda aproximación a los polinomios cociente y resto:

Si particularizamos la igualdad entre expresiones algebraicas $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ a lo que tenemos hasta ahora resulta

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Esta segunda etapa consiste en dividir el polinomio $r_1(x) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$, surgido como resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. Es decir, repetimos lo hecho antes pero considerando un nuevo polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

El nuevo objetivo es alcanzar la igualdad $r_1 \equiv q \cdot c_2 + r$. Al igual que antes, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. Como el término de mayor grado de $r_1(x)$, $8x^3$, sale del producto $q(x) \cdot c_2(x)$, es necesario que el polinomio cociente contenga el monomio

$$c_2(x) = 4x$$

Ello nos lleva a un segundo resto $r_2(x)$:

$$r_2(x) = r_1(x) - q(x) \cdot c_2(x) = (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 4x =$$
$$= (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (8x^3 - 4x^2 + 12x) = -4x^2 - 9x - 2$$

Como este polinomio $r_2(x)$ es de grado 2, igual que el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- Tercera aproximación a los polinomios cociente y resto:

Lo realizado en la etapa segunda nos permite avanzar en la adecuada descomposición de la expresión algebraica que nos ocupa:

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x + \frac{-4x^2 - 9x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Esta tercera etapa consiste en dividir el polinomio $r_2(x) = -4x^2 - 9x - 2$, el resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. De nuevo repetimos el algoritmo pero con otro polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

Perseguimos que $r_2 \equiv q \cdot c_3 + r$. Como en cada paso, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. El término de mayor grado de $r_2(x)$, $-4x^2$, surge del producto $q(x) \cdot c_3(x)$, por lo que

$$c_3(x) = -2$$

y el tercer resto $r_3(x)$ es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$r_3(x) = r_2(x) - q(x) \cdot c_3(x) = (-4x^2 - 9x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot (-2) =$$
$$= (-4x^2 - 9x - 2) - (-4x^2 + 2x - 6) = -11x + 4$$

Como este polinomio $r_3(x)$ es de grado 1, menor que 2, grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto sí es el definitivo. Hemos concluido:

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x + \frac{-4x^2 - 9x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x - 2 + \frac{-11x + 4}{2x^2 - x + 3}$$

Si lo expresamos mediante polinomios:

$$6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 = (2x^2 - x + 3) \cdot (3x^2 + 4x - 2) + (-11x + 4)$$

Conclusión: al dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$ obtenemos como polinomio cociente $c(x) = 3x^2 + 4x - 2$ y como polinomio resto $r(x) = -11x + 4$.

Seguidamente vamos a agilizar la división de polinomios:

Actividades propuestas

18. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

- Primera etapa:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\quad & 3x^2 \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \end{array}$$

- Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\quad & 3x^2 + 4x \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\ \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \quad\; & \\ -4x^2 - 9x - 2 & \end{array}$$

- Las tres etapas:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\quad & 3x^2 + 4x - 2 \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\ \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \quad\; & \\ -4x^2 - 9x - 2 & \\ \underline{4x^2 - 2x + 6} & \\ -11x + 4 & \end{array}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

19. Divide los siguientes polinomios:

- $2x^3 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 - 2x + 4$
- $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$
- $4x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^2 + x + 3$
- $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$
- $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^2 + 1$

20. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x) = x^2 + x - 3$ como polinomio cociente y $r(x) = -3x^2 + 1$ como resto.

3.3. Operaciones con fracciones algebraicas

Puesto que tanto los polinomios como las fracciones algebraicas obtenidas a partir de dos polinomios son, en potencia, números reales, operaremos con tales expresiones siguiendo las propiedades de los números reales.

- **Suma o resta.** Para sumar o restar dos fracciones polinómicas deberemos conseguir que tengan igual denominador. Una manera segura de lograrlo, aunque puede no ser la más adecuada, es ésta:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot q_2} + \frac{p_2 \cdot q_1}{q_2 \cdot q_1} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

- **Producto.** Basta multiplicar los numeradores y denominadores entre sí:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \equiv \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

- **División.** Sigue la conocida regla de la división de fracciones numéricas:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

Actividades propuestas

21. Efectúa los siguientes cálculos:

- $\frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{3}{x}$
- $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1}$
- $\frac{-x}{x^2+3x} \cdot \frac{1}{x-1}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $\dfrac{x-2}{x^2+3x} : \dfrac{x-2}{x+3}$

22. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, únicamente uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

- $\dfrac{-x^2+x-1}{x^3} + \dfrac{3x-2}{x^2}$
- $\dfrac{x-2}{x^2+3x} - \dfrac{4}{x+3}$

23. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

- $\dfrac{8a^4b^2}{2a^2b} = 4a^2b$
- $\dfrac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy} = 2x^2y - \dfrac{3}{2}y$
- $\dfrac{3x^2-9x}{6x+12} = \dfrac{x^2-3x}{x+4}$
- $\dfrac{6a^2b^2+4a^2b-4ab}{2ab^2+16a^2b} = \dfrac{3ab+2a-2}{b+8a}$

24. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$

b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$

d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

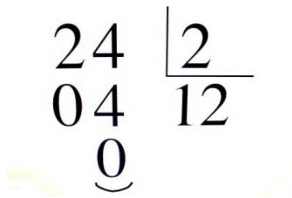
25. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

4.1. Factorización de un polinomio

Tal y como ocurre con la división entera, la división de polinomios también puede ser **exacta**, es decir, el resto puede ser el polinomio cero.



Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & -3x^4 & -4x^3 & +18x^2 & -16x & +8 & -3x^2+3x-2 \\ \cline{7-7}
\underline{-3x^5} & \underline{+3x^4} & \underline{-2x^3} & & & & -x^3+2x-4 \\
 & & -6x^3 & +18x^2 & -16x & +8 & \\
 & & \underline{6x^3} & \underline{-6x^2} & \underline{+4x} & & \\
 & & & 12x^2 & -12x & +8 & \\
 & & & \underline{-12x^2} & \underline{+12x} & \underline{-8} & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

En este caso escribimos

$$\frac{3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8}{-3x^2+3x-2}=-x^3+2x-4$$

y diremos que $q(x)=-3x^2+3x-2$ divide a $p(x)=3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8$. Si optamos por una igualdad polinómica:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^3+2x-4)$$

Observamos que el haber obtenido como resto el polinomio 0 nos permite expresar el polinomio dividendo, $p(x)$, como producto de otros dos polinomios, los polinomios divisor y cociente, $q(x)\cdot c(x)$. Hemos alcanzado una **factorización** del polinomio $p(x)$, o una **descomposición en factores** de $p(x)$.

En general, un polinomio concreto puede ser factorizado, o descompuesto, por medio de diferentes grupos de factores. Si continuamos con el polinomio $p(x)$ anterior, una manera de obtener una descomposición alternativa consiste en, a su vez, alcanzar una factorización de alguno de los polinomios $q(x)$ o $c(x)$. Constatemos que el polinomio $-x^2+2x-2$ divide a $c(x)=-x^3+2x-4$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-x^3 & & +2x & -4 & -x^2+2x-2 \\ \cline{5-5}
\underline{x^3} & \underline{-2x^2} & \underline{+2x} & & x+2 \\
 & -2x^2 & +4x & -4 & \\
 & \underline{2x^2} & \underline{-4x} & \underline{+4} & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En efecto, la división es exacta y ello nos lleva a la siguiente igualdad:

$$-x^3+2x-4=(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Si la trasladamos a la descomposición que teníamos de $p(x)$:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Actividades propuestas

26. Completa, cuando sea posible, las siguientes factorizaciones:

- $-2x^3+2x=-2x\cdot(\qquad)$
- $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\qquad)$
- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\qquad)$
- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\qquad)$

27. Determina un polinomio de grado 4 que admita una descomposición factorial en la que participe el polinomio $6x^3-x^2+3x-1$.

Decimos que un polinomio es **reducible** si admite una factorización mediante polinomios de grado inferior al suyo. En caso contrario el polinomio será **irreducible**.

Es claro que los polinomios de grado 1 no pueden ser descompuestos como producto de otros dos polinomios de menor grado. Son polinomios irreducibles. En el siguiente apartado constataremos que hay polinomios de grado 2 que también son irreducibles.

De las diferentes factorizaciones que puede admitir un polinomio la que más información nos proporciona es aquella en la que todos los factores que intervienen son polinomios irreducibles, puesto que *no es mejorable*. Conviene advertir que, en general, no es fácil alcanzar ese tipo de descomposiciones. Seguidamente vamos a ahondar en esta cuestión.

4.2. Raíces de un polinomio

Dado un polinomio $p(x)$ diremos que un número real concreto α es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio p, si al evaluar p en $x=\alpha$ obtenemos el número 0, esto es, si

$$p(\alpha)=0$$

Ejemplo:

Consideremos el polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- El número 2 es una raíz de $s(x)$, puesto que

$$s(2)=2\cdot 2^3+2\cdot 2^2-8\cdot 2-8=2\cdot 8+2\cdot 4-16-8=16+8-16-8=0$$

- Otra raíz de $s(x)$ es el número -1:

$$s(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-8=2\cdot(-1)+2\cdot(+1)+8-8=-2+2+8-8=0$$

- En cambio, el número 1 no es una raíz de $s(x)$:

$$s(1)=2\cdot 1^3+2\cdot 1^2-8\cdot 1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq 0$$

- Tampoco es raíz de $s(x)$ el número 0:

$$s(0)=2\cdot 0^3+2\cdot 0^2-8\cdot 0-8=0+0-0-8=-8\neq 0$$

Actividades propuestas

28. Estudia si los siguientes números son o no raíz de los polinomios indicados:

- $x=3$ de x^3-3x^2+1
- $x=-2$ de x^3+3x^2+3x+2
- $x=1$ de x^3-3x^2+x+1
- $x=0$ de x^3-3x^2+1
- $x=-1$ de x^3-3x^2-x+3

En el siguiente ejercicio vamos a recoger algunas conexiones entre las raíces de un polinomio y las operaciones de suma y producto de polinomios.

Actividades propuestas

29. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α.

- Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?
- Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?
- ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4\cdot p_1(x)$?

El que un número real sea raíz de un polinomio está fuertemente conectado con la factorización de dicho polinomio:

Si un número real concreto α es una raíz del polinomio $p(x)$, entonces el polinomio $x-\alpha$ divide a $p(x)$. Dicho de otro modo, el polinomio $p(x)$ admite una descomposición factorial de la siguiente forma:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x)$$

para cierto polinomio $c(x)$, el cual puede ser conocido al dividir $p(x)$ entre $x - \alpha$.

Vamos a demostrar la anterior aseveración. Si dividimos $p(x)$ entre $x - \alpha$, obtendremos

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x) + r(x)$$

Como el polinomio divisor, $x - \alpha$, es de grado 1, y el polinomio resto ha de ser de inferior grado, deducimos que el resto anterior es un número real β. Escribamos $r(x) \equiv \beta$:

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x) + \beta$$

El polinomio de la izquierda, $p(x)$, es idéntico al de la derecha, $(x - \alpha) \cdot c(x) + \beta$. Por esa razón, al evaluarlos en cierto número real obtendremos el mismo valor. Procedamos a particularizarlos para $x = \alpha$. Al ser α raíz de $p(x)$, $p(\alpha) = 0$. Esto nos lleva a

$$0 = p(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot c(\alpha) + \beta = 0 \cdot c(\alpha) + \beta = 0 + \beta = \beta$$

y, así, el resto es 0, y

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x)$$

Es natural que nos preguntemos si es cierto el recíproco del resultado anterior. La respuesta es afirmativa:

Si un polinomio $p(x)$ admite una descomposición factorial de la forma

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x)$$

para cierto polinomio $c(x)$ y cierto número real α, entonces el número α es una raíz del polinomio $p(x)$, esto es, $p(\alpha) = 0$.

Su demostración es sencilla. Basta que evaluemos p en $x = \alpha$:

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot c(\alpha) = 0 \cdot c(\alpha) = 0$$

Si fundimos estos dos últimos resultados en uno solo nos encontramos ante el denominado *teorema del factor*:

Teorema del factor. Un número real concreto α es raíz de un polinomio $p(x)$ si y solo si el polinomio $x - \alpha$ divide a $p(x)$, es decir, si y solo si el polinomio $p(x)$ admite una descomposición factorial de la forma

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x)$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

Volvamos con el polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

- Sabemos que el número 2 es una raíz de $s(x)$. Ratifiquemos que $x-2$ divide a $s(x)$:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +2x^2 & -8x & -8 & \ x-2 \\ \cline{5-5} -2x^3 & +4x^2 & & & 2x^2+6x+4 \\ \cline{1-2} & 6x^2 & -8x & -8 & \\ & -6x^2 & +12x & & \\ \cline{2-3} & & 4x & -8 & \\ & & -4x & +8 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

  Podemos descomponer $s(x)$ de la siguiente forma:

$$2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)$$

- Vimos que otra raíz de $s(x)$ es el número -1. Si observamos la precedente factorización de $s(x)$, es evidente que este número -1 no es raíz del factor $x-2$, por lo que necesariamente debe serlo del otro factor $c(x)=2x^2+6x+4$:

$$c(-1)=2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+4=2\cdot(+1)-6+4=0$$

  Al haber constatado que -1 es raíz del polinomio $c(x)$, deducimos que $x-(-1)=x+1$ nos va a ayudar a descomponer $c(x)$:

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^2 & +6x & +4 & \ x+1 \\ \cline{4-4} -2x^2 & -2x & & 2x+4 \\ \cline{1-2} & 4x & +4 & \\ & -4x & -4 & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$$

  Luego:

$$2x^2+6x+4=(x+1)\cdot(2x+4)$$

- Si reunimos lo hecho en los apartados precedentes de este ejemplo:

$$s(x)=2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)=(x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x+4)=$$
$$=(x-2)\cdot(x+1)\cdot2\cdot(x+2)=2\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

  Se ha descompuesto $s(x)$ como producto de tres polinomios irreducibles de grado 1. A la vista de ellos conocemos todas las raíces de $s(x)$, los números 2, -1 y -2.

Los resultados teóricos que hemos establecido nos conducen a este otro:

Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales.

Hay polinomios que no admiten raíces, es decir, que no se anulan nunca:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplos:

- El polinomio $t(x)=x^2+1$ no tiene raíces puesto que al evaluarlo en cualquier número real α siempre nos da un valor positivo y, por lo tanto, distinto de 0:

$$t(\alpha)=\alpha^2+1 > 0$$

  Además, este polinomio de grado dos, $t(x)=x^2+1$, es un polinomio irreducible porque, al carecer de raíces, no podemos expresarlo como producto de polinomios de menor grado.
- Otro polinomio sin raíces es

$$u(x)=(x^2+1)^2=(x^2+1)\cdot(x^2+1)=x^4+2x^2+1$$

  Sin embargo, $u(x)=x^4+2x^2+1$ es un polinomio reducible puesto que, obviamente, puede ser expresado como producto de dos polinomios de inferior grado.

Aunque no sea posible demostrarlo, por su dificultad, sí se puede anunciar que todo polinomio de grado impar posee, al menos, una raíz real.

Actividades propuestas

30. Construye un polinomio de grado 3 tal que posea tres raíces distintas.

31. Determina un polinomio de grado 3 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

32. Construye un polinomio de grado 3 de forma que tenga una única raíz.

33. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

admite al número 0 como raíz.

34. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

admite al número 1 como raíz.

35. Obtén todas las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

- $x+7$
- $-x+5$
- $2x-3$
- $-4x-9$
- $-2x$
- x^2-3x

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $4x^2 - x - 3$
- $x^3 - x$
- $x^3 + x$

4.3. Regla de Ruffini

En el apartado anterior se probó la equivalencia entre que un número real α sea raíz de un polinomio $p(x)$ y el hecho de que el polinomio mónico de grado uno $x-\alpha$ divida a $p(x)$, esto es, que exista otro polinomio $c(x)$ tal que sea posible una factorización de $p(x)$ del tipo:

$$p(x) = (x-\alpha)\cdot c(x)$$

Debido a la importancia que tiene la división de polinomios cuando el polinomio divisor es de la forma $x-\alpha$, es conveniente agilizar tales divisiones.

Ejemplo:

- Consideremos el polinomio $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 3$. Vamos a dividirlo entre $x+2$. Si el resto es 0 el número -2 será una raíz de $p(x)$; en el caso contrario, si no es 0 el resto, entonces -2 no será raíz de $p(x)$.

$$\begin{array}{rl}
3x^3 - 4x^2 + x + 3 & \underline{|\ \ x+2\quad} \\
\underline{-3x^3 - 6x^2} \qquad\qquad & 3x^2 - 10x + 21 \\
-10x^2 + \ x\ + 3 & \\
\underline{10x^2 + 20x} \quad & \\
21x + 3 & \\
\underline{-21x - 42} & \\
-39 &
\end{array}$$

Puesto que el resto no es cero, -2 no es una raíz de $p(x)$.

Veamos cómo han surgido tanto el polinomio cociente como el resto. El que el grado del dividendo sea tres y que el divisor sea de grado uno impone que el cociente tenga grado dos y que el resto sea un número real. El cociente consta de los monomios $3x^2$, $-10x$ y 21, los cuales coinciden con los monomios de mayor grado de cada uno de los dividendos después de disminuir sus grados en una unidad: $3x^2$ procede de $3x^3 - 4x^2 + x + 3$ (el dividendo inicial), $-10x$ viene de $-10x^2 + \ x\ + 3$ y, por último, 21 de $21x+3$. Este hecho, coincidencia en el coeficiente y disminución del grado en una unidad, se debe a que el divisor, $x+2$, es mónico y de grado uno.

Seguidamente, vamos a tener en cuenta únicamente los coeficientes del dividendo, por orden de grado, 3, –4, 1 y 3; en cuanto al divisor, como es mónico y de grado uno, basta considerar su término independiente, +2, pero como el resultado de multiplicar los monomios que van conformando el cociente por el divisor hemos de restárselo a cada uno de los dividendos, atendiendo a este cambio de signo, en lugar del término independiente, +2, operaremos con su opuesto, –2, número que, a la vez, es la raíz del divisor $x+2$ y sobre el que pesa la pregunta de si es o no raíz de $p(x)$.

- Primer paso de la división:

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2 \\
\quad -10x^2+\ x\ +3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & & -6 & & \\ \hline
 & 3 & -10 & & \\ \cline{5-5}
\end{array}$$

Aparece en el cociente el monomio $3x^2$ (coeficiente 3), el cual provoca la "desaparición" de $3x^3$ en el dividendo y la aparición del monomio $-6x^2$ (coeficiente $-6=(-2)\cdot 3$). Después de operar (sumar) nos encontramos con $-10x^2$ (coeficiente $-10=(-4)+(-6)$) y, en el cociente, $-10x$.

- Segundo paso. El dividendo pasa a ser $-10x^2+\ x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x \\
\quad -10x^2+\ x\ +3 & \\
\quad \underline{10x^2+20x} & \\
\qquad\qquad 21x+3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & & -6 & 20 & \\ \hline
 & 3 & -10 & 21 & \\ \cline{5-5}
\end{array}$$

La irrupción en el cociente del monomio $-10x$ (coeficiente -10) provoca la "desaparición" de $-10x^2$ en el dividendo y la aparición del monomio $20x$ (coeficiente $20=(-2)\cdot(-10)$). Después de operar (sumar) nos encontramos con $21x$ (coeficiente $21=1+20$) y, en el cociente, 21.

- Tercer paso. El dividendo pasa a ser $21x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x+21 \\
\quad -10x^2+\ x\ +3 & \\
\quad \underline{10x^2+20x} & \\
\qquad\qquad 21x+3 & \\
\qquad\quad \underline{-21x-42} & \\
\qquad\qquad\quad -39 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline
 & 3 & -10 & 21 & -39 \\ \cline{5-5}
\end{array}$$

Tenemos en el cociente el término independiente 21. Éste provoca la eliminación de $21x$ en el dividendo y la aparición del término $-42=(-2)\cdot 21$. Después de operar (sumar) nos encontramos con el resto $-39=3-42$.

En cada uno de los pasos figura, en la parte derecha, lo mismo que se ha realizado en la división convencional, pero con la ventaja de que todo es más ágil debido a que únicamente se manejan números reales: los coeficientes de los distintos polinomios intervinientes.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Estamos ante la llamada **regla de Ruffini**, un algoritmo que nos proporciona tanto el cociente como el resto que resultan de dividir un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x-\alpha$.

Ejemplo:

- Dividamos el polinomio $p(x)=-x^4+2x^3-5x+4$ entre $x-3$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & & -3 & -3 & -9 & -12 \\ \hline & -1 & -1 & -3 & -4 & \underline{|-8} \end{array}$$

El cociente es $-x^3-x^2-3x-4$ y el resto -8. Como el resto no es 0 deducimos que el número 3 no es raíz de $p(x)=-x^4+2x^3-5x+4$. La relación entre dividendo, divisor, cociente y resto es, como siempre:

$$p(x)=-x^4+2x^3-5x+4=(x-3)\cdot(-x^3-x^2-3x-4)+(-8)$$

Si evaluamos $p(x)$ en $x=3$ no puede dar cero, pero ¿qué valor resulta?

$$p(3)=(3-3)\cdot(-3^3-3^2-3\cdot 3-4)+(-8)=0+(-8)=-8$$

Naturalmente hemos obtenido el resto anterior. Este hecho viene recogido en el denominado teorema del resto.

Teorema del resto. El valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ al particularizarlo en $x=\alpha$ coincide con el resto que aparece al dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Actividades propuestas

36. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

- $-2x^2+x+1$ entre $x+1$
- x^3+2x^2-2x+1 entre $x+2$
- $4x^3-3x^2-1$ entre $x-1$
- x^3-9x+1 entre $x-3$

37. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

- $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5
- $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$
- $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$
- $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$

38. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-x^3+2x^2+x+2$ en $x=3$.

39. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir x^3+3x^2+3x+2 entre $2x+6$.

Para facilitar la comprensión de los conceptos y resultados de este tema la mayoría de los números que han aparecido hasta ahora, coeficientes, raíces, etc., han sido números enteros. Por supuesto que podemos encontrarnos con polinomios con coeficientes racionales, o irracionales, o con polinomios con raíces dadas por una fracción o un número irracional. También existen polinomios que carecen de raíces.

Ejemplos:

- Comprobemos, mediante la regla de Ruffini, que $\alpha=\frac{1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^2-3x+1$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- Para conocer las raíces del polinomio x^2-2 debemos estudiar si hay algún número real α tal que lo anule, es decir, para el que se tenga

$$\alpha^2-2=0$$
$$\alpha^2=2$$
$$\alpha=\pm\sqrt{2}$$

  Así, el polinomio de grado dos x^2-2 tiene dos raíces distintas, las cuales son números irracionales.

- Ya sabemos que hay polinomios que carecen de raíces, como por ejemplo x^2+4.

Apreciamos que la regla de Ruffini nos informa sobre si un número concreto es o no raíz de un polinomio. Naturalmente, cuando estamos ante un polinomio, y nos interesa conocer sus raíces, no es posible efectuar una prueba con cada número real para determinar cuáles son raíz del polinomio. En el próximo apartado destacaremos ciertos "números candidatos" a ser raíz de un polinomio.

4.4. Cálculo de las raíces de un polinomio

A la hora de buscar las **raíces enteras de un polinomio** disponemos del siguiente resultado:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_2x^2+a_1x+a_0$$

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces enteras**, si las tuviera, se encuentran necesariamente entre los divisores enteros de su término independiente a_0.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Procedamos a su demostración. Supongamos que cierto número entero α es una raíz de ese polinomio. Tal número debe anularlo:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$
$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0$$
$$\alpha \cdot (a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ... + a_2\alpha + a_1) = -a_0$$
$$a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ... + a_2\alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

En la última igualdad, el número del lado izquierdo es entero, porque está expresado como una suma de productos de números enteros. Por ello, el número del lado derecho, $\frac{-a_0}{\alpha}$, también es entero. Al ser también enteros tanto $-a_0$ como α, alcanzamos que α es un divisor de a_0.

Ejemplos:

- Determinemos, con arreglo al anterior resultado, qué números enteros son candidatos a ser raíces del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$:
  Tales números enteros candidatos deben ser divisores de -6, el término independiente del polinomio. Por ello, los únicos números enteros que pueden ser raíz de ese polinomio son:
  $$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$
  Puede comprobarse que los números enteros 2 y -3 son raíces; los demás no lo son.
- Las únicas posibles raíces enteras del polinomio $2x^3 + x^2 + 12x + 6$ también son:
  $$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$
  En este caso ninguno de esos números es raíz del polinomio.

Actividades propuestas

40. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

- $x^3 - x^2 + 2x - 2$
- $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$
- $2x^3 + x^2 - 18x - 9$
- $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

Algo más general podemos afirmar sobre clases de números y raíces de un polinomio:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces racionales**, si las tuviera, necesariamente tienen por numerador algún divisor del término independiente, a_0, y por denominador algún divisor del coeficiente del término de mayor grado, a_n.

Ejemplos:

- Volviendo a uno de los polinomios del ejemplo anterior, $2x^3+3x^2-11x-6$, los números racionales candidatos a ser raíces suyas tienen por numerador a un divisor de -6 y por denominador a un divisor de 2. Por lo tanto, los únicos números racionales que pueden ser raíz de ese polinomio son:
$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 2}{2}=\pm 1,\ \frac{\pm 3}{2},\ \frac{\pm 6}{2}=\pm 3$$
Además de 2 y -3, también es raíz $\frac{-1}{2}$; los demás no lo son.
- Las únicas posibles raíces racionales del polinomio $2x^4+2x^3-x^2-3x-3$ son:
$$\pm 1,\ \pm 3,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 3}{2}$$
En este caso ninguno de esos números es raíz del polinomio.

Actividades propuestas

41. Completa el ejemplo precedente comprobando que, en efecto, $\frac{-1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3+3x^2-11x-6$.

42. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

- $3x^2+4x+1$
- $2x^3-9x^2+12x-4$

En el capítulo próximo, dedicado a las ecuaciones, seremos capaces de obtener las raíces de todo polinomio de grado dos, si las tuviere.

4.5. Factorización de polinomios y fracciones algebraicas

La factorización de polinomios puede ser utilizada para simplificar algunas expresiones en las que intervienen fracciones algebraicas. Veámoslo a través de un par de ejemplos:

Ejemplo:

- Una fracción algebraica como

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

puede ser simplificada gracias a que el numerador y el denominador admiten factorizaciones en las que algún polinomio está presente en ambas.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Como ya hemos apuntado en otras ocasiones, las expresiones final e inicial no son idénticas pero sí son equivalentes en todos aquellos valores para los que ambas tienen sentido, esto es, para aquellos en los que no se anula el denominador.

Ejemplo:

- En una suma de fracciones polinómicas como ésta

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podemos alcanzar un común denominador en las fracciones a partir de la descomposición de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$

$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Conviene destacar que en el resultado final se ha optado por dejar el denominador factorizado. De esa forma, entre otras cuestiones, se aprecia rápidamente para qué valores de la indeterminada esa fracción algebraica no admite ser evaluada.

Actividades propuestas

43. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

- $\dfrac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$
- $\dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$
- $\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

44. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $\dfrac{5}{-3x+12}+\dfrac{x+2}{x^2-4x}$
- $\dfrac{-x}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

4.6. Productos notables de polinomios

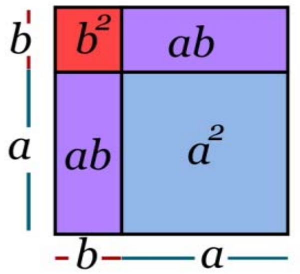
En este apartado vamos a destacar una serie de productos concretos de polinomios que surgen frecuentemente. Podemos exponerlos de muy diversas formas. Tal y como lo haremos, aparecerá más de una indeterminada; hemos de ser capaces de apreciar que si, en un algún caso concreto, alguna indeterminada pasa a ser un número concreto esto no hará nada más que particularizar una situación más general.

Potencias de un binomio. Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los oportunos cálculos:

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

  El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

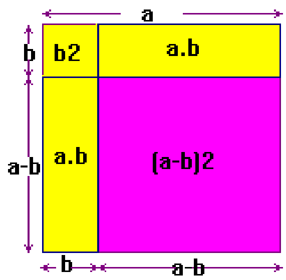
  Comprueba la igualdad a partir de los cuadrados y rectángulos de la ilustración.

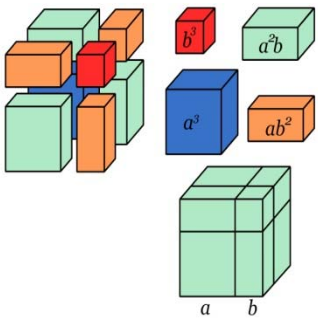


- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

  El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

  Observa la figura y conéctala con la igualdad.





- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Ratifica la igualdad con los cubos y prismas de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Podemos observar que, en cada uno de los desarrollos, el exponente del binomio coincide con el grado de cada uno de los monomios.

Ejemplos:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$

Actividades propuestas

45. Realiza los cálculos:

- $(1+3a)^2$
- $(-x+3)^2$
- $(-3x-2)^2$
- $(x^2-1)^3$
- $(4x+2)^3$

46. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

- $(a+b+c)^2$
- $(a+b-c)^2$

47. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x - 5/x)^2$

d) $(3a - 5)^2$ e) $(a^2 - b^2)^2$ f) $(3/5y - 2/y)^2$

48. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 - 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$

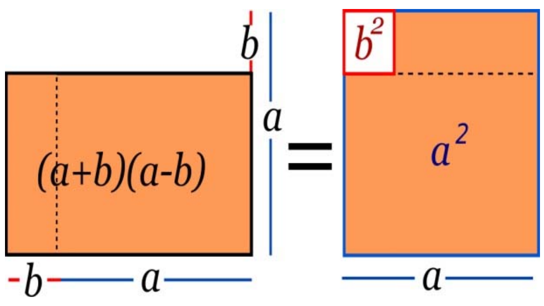
d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

Suma por diferencia. De nuevo la siguiente igualdad se obtiene tras efectuar el producto señalado:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

Observa las figuras y conéctalas con la igualdad.



Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplos:

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$
  $=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Actividades propuestas

49. Efectúa estos productos:

- $(4x+3y)\cdot(4x-3y)$
- $(2x^2+4)\cdot(2x^2-4)$
- $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

De vuelta a los polinomios de una variable, podemos decir que en este apartado hemos expandido *potencias de un polinomio*, o productos de un polinomio por sí mismo, así como productos de la forma *suma por diferencia*. Conviene darse cuenta de que sus fórmulas, leídas al revés, constituyen una factorización de un polinomio.

Ejemplos:

- $x^2+12x+36=x^2+2\cdot6\cdot x+6^2=(x+6)^2$
- $2x^3-12x^2+18x=2x\cdot(x^2-6x+9)=2x\cdot(x^2-2\cdot3\cdot x+3^2)=2x\cdot(x-3)^2$
- $x^2-5=(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})$
- $x^4-16=(x^2+4)\cdot(x^2-4)=(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

Actividades propuestas

50. De acuerdo con lo expuesto, factoriza los siguientes polinomios:

- x^2-2x+1
- $3x^2+18x+27$
- $4x^5-16x^3$

51. Calcula los siguientes productos:

a) $(3x + 1)\cdot(3x - 1)$ b) $(2a - 3b)\cdot(2a + 3b)$
c) $(x^2 - 5)\cdot(x^2 + 5)$ d) $(3a^2 + 5)\cdot(3a^2 - 5)$

52. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

53. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

a) $\dfrac{x^2-1}{3x+3}$ b) $\dfrac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$ c) $\dfrac{6-3a}{a^2-4}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Numerosos actos que podemos encuadrar dentro de "**trucos de magia**" pueden ser analizados, o "destripados", mediante un uso adecuado de las Matemáticas, en particular a partir de expresiones algebraicas.

i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
ii. Que lo multiplique por 10
iii. Que al resultado anterior le sume 32
iv. Que multiplique por 100 lo obtenido
v. Qué le sume 800
vi. Que divida entre 1000 la última cantidad
vii. Que al resultado precedente le reste el número que escribió
viii. ¡Tiene un 4! ¡Magia!

En los ejercicios 1 y 2 tienes otros ejemplos de esto.

ALGORITMOS

La regla de Ruffini es un ejemplo de *algoritmo*. Un *algoritmo* es una relación ordenada y precisa de operaciones, o acciones, que se han de realizar sobre los datos inicialmente disponibles con la finalidad de resolver un problema o alcanzar nueva información. Otros algoritmos:
- el de la división de dos números enteros, que nos proporciona su cociente y su resto.
- el de Euclides, por el que obtenemos el máximo común divisor de dos enteros positivos.
- el de la raíz cuadrada, que ofrece la raíz cuadrada de un número.
- el que origina la letra de un DNI o NIF.

Los algoritmos son un pilar básico en el funcionamiento de cualquier ordenador o computadora.

COEFICIENTES BINOMIALES

Cuando expandimos el binomio $(a+b)^n$ aparece un polinomio tal que todos sus monomios son del mismo grado, grado n. La parte literal de cada uno de ellos es muy fácil de escribir, no así, en principio, cada uno de los coeficientes. Sin embargo, gracias a un triángulo numérico podemos conocer los coeficientes que corresponden a cada exponente n: el ***triángulo de Tartaglia*** o ***de Pascal***. Es un triángulo numérico con muchas propiedades y utilidades. Apuntemos una propiedad: cada una de sus líneas comienza y concluye con el dígito 1, el resto de números es igual a la suma de los dos números que se encuentran sobre él.

n = 0	1									
n = 1	1	1								
n = 2	1	2	1							
n = 3	1	3	3	1						
n = 4	1	4	6	4	1					
n = 5	1	5	10	10	5	1				
n = 6	1	6	15	20	15	6	1			
n = 7	1	7	21	35	35	21	7	1		
n = 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
n = 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Por ejemplo, el desarrollo para el exponente $n=5$ sería

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Revisor: Javier Rodrigo

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Noción	*Descripción*	*Ejemplos*
Expresión algebraica	Expresión matemática que se construye con números reales y las operaciones matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación y/o división	$\frac{-3x}{2x+y^3}-x\cdot y^2\cdot z$
Variable, indeterminada	Lo no concretado en una expresión algebraica	Las variables, o indeterminadas, del ejemplo anterior son *x*, *y*, *z*.
Valor numérico de una expresión algebraica	Al fijar un valor concreto para cada indeterminada, o variable, de una expresión algebraica aparece un número real: el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas	Si, en la expresión precedente, hacemos *x*=3, *y*=-2, *z*=1/2 obtenemos $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3}-3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada por el producto de números reales e indeterminadas	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$, $7\cdot x^2$
Coeficiente de un monomio	El número real que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas, del monomio	Los coeficientes de los anteriores monomios son, respectivamente, -5 y 7
Parte literal de un monomio	La indeterminada, o producto de indeterminadas, que multiplica al coeficiente del monomio	La parte literal de $-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ es $x\cdot y^3\cdot z^2$
Grado de un monomio	Cuando hay una única indeterminada es el exponente de dicha indeterminada. Si aparecen varias, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas	Los grados de los monomios precedentes son 6 y 2, respectivamente
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	El anterior polinomio es de grado 3
Suma, resta y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$p = -3x + 6$; $q = x^2 + 4$. $p + q = x^2 - 3x + 10$; $p - q = -x^2 - 3x + 2$; $p \cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24$.
División de dos polinomios	Se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente (*c*(*x*)) y resto (*r*(*x*)), ligados a los polinomios	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

	iniciales, los polinomios dividendo ($p(x)$) y divisor ($q(x)$)	
Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Polinomio irreducible	Es aquel que no puede ser expresado como producto de otros polinomios de grado inferior	$-3x+6$, x^2+4
Raíz de un polinomio	Un número real concreto α es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio p, si al evaluar p en $x=\alpha$ obtenemos el número 0, es decir, si $p(\alpha)=0$	2 es raíz de $-3x+6$ 1 y -3 son raíces de x^2+2x-3
Raíces y factorización	El que un número real concreto α sea una raíz del polinomio $p(x)$ es equivalente a que el polinomio $p(x)$ admita una descomposición factorial de la forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$ para cierto polinomio $c(x)$	-2 es una raíz de x^3+2x^2-x-2 $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\cdot(x^2-1)$
Número de raíces y grado	Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales	x^2+2x-3 tiene dos raíces, 1 y -3 $3x^2+7$ no tiene raíces
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
ii. Que lo multiplique por 10
iii. Que al resultado anterior le sume 100
iv. Que multiplique por 1000 lo obtenido
v. Que divida entre 10000 la última cantidad
vi. Que al resultado precedente le reste el número que escribió
vii. Independientemente del número desconocido original ¿qué número ha surgido?

2. En este otro ejercicio vamos a *adivinar* dos números que ha pensado un compañero. Construye una expresión algebraica que recoja todos los pasos y, finalmente, descubre el truco.

i. Solicita a un compañero que escriba en un papel, y no muestre, dos números naturales: uno de una cifra (entre 1 y 9) y otro de dos cifras (entre 10 y 99)
ii. Que multiplique por 4 el número escogido de una cifra
iii. Que al resultado anterior le sume 3
iv. Que multiplique por 5 lo obtenido
v. Que a la última cantidad le sume 10
vi. Que multiplique el resultado precedente por 5
vii. Que le sume a lo anterior el número de dos cifras que eligió
viii. Dile al compañero que desvele cuál es el resultado de todos esos cambios
ix. ¿Qué debemos hacer para descubrir los dos números que escogió el compañero?

3. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

- $\dfrac{3x-6}{(x+2)\cdot(2x-14)}$
- $\dfrac{-x}{x^2-4x+4}$
- $\dfrac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$
- $\dfrac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

4. Una persona tiene ahorrados 1000 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 3 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?

5. Generalicemos el ejercicio anterior: Si ingresamos X euros en un depósito bancario cuyo tipo de interés es del i % anual, ¿cuál será la cantidad que recuperaremos al cabo de n años?

6. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(3) = -7$.

7. Consideremos los polinomios $p(x) = -5x^3 + x^2 - 3x - 2$, $q(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 7$ y $r(x) = 4x^2 + 5x - 1$. Realiza las siguientes operaciones:

- $p + q + r$
- $p - q$
- $p \cdot r$
- $p \cdot r - q$

8. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{ax}{3} - \frac{by}{2}\right) \cdot \left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) $(0,3x - 0,2y + 0,1z) \cdot (0,1x + 0,2y - 0,3z)$ c) $(x - 1)\,(x - a)\,(x - b)$

9. Efectúa las divisiones de polinomios:

- $2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 9x - 1$ entre $2x^2 + 3x - 3$
- $4x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 10x - 6$ entre $x^3 + 2x + 3$

10. Calcula los cocientes:

a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

11. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

- $\frac{x-1}{x^2-3x} + \frac{2x}{x^2-6x+9}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2x}{x^2-6x+9}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2x}{x^2-6x+9}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2x}{x^2-6x+9}$

12. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número -5 sea raíz suya.

13. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6, -3 y 0.

14. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

15. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x)=5x^2+5x+1$.

16. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

- $3x^3+11x^2+5x-3$
- $3x^3+2x^2+8x-3$
- $3x^3+5x^2+x-1$
- $2x^3+x^2-6x-3$

17. Obtén las raíces racionales de los polinomios del ejercicio anterior.

18. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

- $3x^3+11x^2+5x-3$
- $3x^3+5x^2+x-1$
- $2x^3+x^2-6x-3$
- $3x^3-6x^2+x-2$

19. Calcula las potencias:

a) $(x-2y+z)^2$ b) $(3x-y)^3$ c) $((1/2)a+b^2)^2$ d) $(x^3-y^2)^2$

20. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

- x^2+6x+9
- x^4-8x^2+16
- $x^2+\sqrt{20}\,xy+5y^2$
- $x^4+2x^3+x^2+2x+1$
- $x^4-2x^3+x^2+2x+1$
- x^2-36
- $5x^2+1$
- $5x^2-11$
- x^2-3y^2

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

21. Descompón en factores:

a) $x^4 - 1$ b) $x^2 - y^2$ c) $x^2y^2 - z^2$ d) $x^4 - 2x^2y + y^2$

22. Con este ejercicio se pretende mostrar la conveniencia a la hora de no operar una expresión polinómica que tenemos factorizada total o parcialmente.

a) Comprueba la igualdad $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 3)$.

b) Determina todas las raíces del polinomio $x^4 - 5x^2 + 6$.

23. Factoriza numerador y denominador y simplifica:

a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$ c) $\dfrac{x^3 - x}{x^4 - 1}$

24. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)} - \dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y} \cdot \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

25. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{x^4-1}{x^7} : \dfrac{x^2+1}{x^8}$ b) $\dfrac{2x+3y}{a-b} - \dfrac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x + (1-x^4)\left(\dfrac{x+1}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)$

26. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x+a} : \dfrac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) : \dfrac{ab}{a+b}$

27. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x+y}} : \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a+y}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a+y}}$ b) $\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y}} \cdot \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y}}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ b) $-2x^5+x^4-x^3+5x-1$ c) $5\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

2. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ es:

a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

d) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

4. Al dividir el polinomio $p(x)=x^5+x^4+x^3+1$ entre $q(x)=x^2+x+1$ el polinomio resto resultante:

a) debe ser de grado 2.   b) puede ser de grado 2.

c) debe ser de grado menor que 2.   d) ninguna de las opciones precedentes.

5. Considera el polinomio $2x^4-7x^3+5x^2-7x+3$. ¿Cuáles de los siguientes números enteros son *razonables candidatos* para ser una raíz suya?

a) 3 b) 2 c) -1 d) -7

6. Considera el polinomio $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. ¿Cuáles de los siguientes números racionales son *razonables candidatos* para ser una de sus raíces?

a) -3 b) $\frac{-1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres

a) tiene tres raíces.   b) tiene, a lo sumo, tres raíces.   c) tiene, al menos, tres raíces.

8. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

9. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.

b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.

c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.

d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

10. Analiza si puede haber algún polinomio de grado ocho que no tenga ninguna raíz.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF